

Zur Numerik kontinuierlicher Wavelet- und
Matrixwavelet-Transformationen

Mit Anwendungen in Filterung und Analyse des
Elektroenzephalogramms

Dissertation am Fachbereich Mathematik der JLU Gießen

Dipl.-Math. Alexander Klein

20. März 2011

Für meine Eltern,
ohne die ich diese Arbeit nicht
begonnen hätte,
und für Christina,
ohne die sie wohl nicht fertig
geworden wäre.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Sauer vom Lehrstuhl für Numerische Mathematik und Herrn Professor Skrandies vom physiologischen Institut für die hervorragende Betreuung und die langfristige konstruktive Zusammenarbeit.

Darüber hinaus danke ich Gebhard Sammer und Helge Gebhardt vom BION für das interessante Kooperationsprojekt zur Artefaktbereinigung von EEG-Daten.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Übersicht	9
2	Grundlagen	13
2.1	Die Fouriertransformation	13
3	Die skalare Wavelettransformation	17
3.1	Grundbegriffe	17
3.2	Unschärfe und Momentanfrequenz	18
3.3	Abklingverhalten und Abschneidefehler	23
3.3.1	Abklingverhalten bei kleinen Skalen	25
3.3.2	Abschneidefehler bei unvollständiger Transformation der kleinen Skalen	27
3.3.3	Abklingverhalten bei großen Skalen	27
3.3.4	Abschneidefehler bei unvollständiger Transformation der großen Skalen	28
3.3.5	Abschneidefehler bei der Rücktransformation im Fre- quenzbereich	33
3.3.6	Analyse und Synthese mit verschiedenen Wavelets . . .	35
3.4	Numerische Aspekte	38
3.4.1	Abtastung von kontinuierlichen Signalen	39
3.4.2	Die diskrete Fouriertransformation	39
3.4.3	Die Hintransformation	41
3.4.3.1	Festlegung der oberen und unteren Skalen- grenzen	42
3.4.4	Die Rücktransformation	44
3.4.4.1	Approximationsfehler der Rücktransformation	44
3.4.4.2	Der Einfluss der verwendeten Quadraturformel	47
3.4.4.3	Der Quadraturfehler im Zeitbereich	48
3.4.4.4	Der Quadraturfehler im Frequenzbereich . . .	55
3.4.4.5	Rücktransformation (fast) ohne Quadratur . .	59

4	Artefaktbereinigung von EEG-Daten	61
4.0.5	Analyse und Korrektur des cardioballistischen Artefakts	62
4.0.6	Ergebnisse und kritische Bewertung	67
5	Die Matrixwavelet-Transformation	73
5.1	Definition	73
5.2	Zulässigkeit	74
5.2.1	Wann ist C_Ψ invertierbar?	75
5.2.2	Wann existieren die Einträge in C_Ψ ?	77
5.3	Kombinationen von Matrixwavelets	78
5.4	Analytische Matrixwavelets	80
6	Inverse Transformationen	83
6.1	Die „natürliche“ inverse Transformation	83
6.2	Zulässigkeit vermöge weiterer Operationen	84
6.2.1	Zulässigkeit vermöge Identität	84
6.2.2	Schnelle Invertierung	86
6.2.3	Zulässigkeit vermöge anderer Operatoren	88
7	Konstruktion von Matrixwavelets	89
7.1	Topologisch angepasste Matrixwavelets	90
7.1.1	Konstruktionen aus einem einzigen Wavelet	90
7.1.1.1	Äquidistante kollineare Messpunkte bei iso-	
	troper Signalausbreitung	90
7.1.1.2	Zeitversatz versus Phasenversatz	95
7.1.1.3	Kompliziertere Anordnungen von Messpunkten	95
7.1.2	Konstruktionen aus mehreren Wavelets	101
8	Rekonstruktionsqualität	103
9	EEG-Analyse mit Matrixwavelets	113
9.1	Hauptkomponentenanalyse	113
9.1.1	Grundlagen	113
9.1.2	Unterschiede zwischen reeller und komplexer	
	Hauptkomponentenanalyse	115
9.2	Überlegungen zur Anwendung auf das EEG	116
9.2.1	U — Aktivierung und räumliche Schwerpunkte	119
9.2.2	Σ — Dimensionalitätsanalyse	122
9.2.3	V^H — Zeit-Frequenz-Schwerpunkte	124
9.3	Ergebnisse für ein ausgewähltes Experiment	127
9.3.1	U — Aktivierung und räumliche Schwerpunkte	127

9.3.1.1	Rohdaten	129
9.3.1.2	Inverse Distanzgewichtung	132
9.3.1.3	Korrelationsgewichtung	136
9.3.2	Σ — Dimensionalitätsanalyse	143
9.3.2.1	Rohdaten	143
9.3.2.2	Inverse Distanzgewichtung	143
9.3.2.3	Korrelationsgewichtung	143
9.3.3	V^T — Zeit-Frequenz-Schwerpunkte der ersten Kompo- nente	147
9.3.3.1	Rohdaten	148
9.3.3.2	Inverse Distanzgewichtung	152
9.3.3.3	Korrelationsgewichtung	156
9.4	Zusammenfassung und Ausblick	160
A	Wavelets	163
A.1	Reelle Wavelets	163
A.1.1	Reelle Wavelets mit kompaktem Träger	163
A.1.2	Ableitungen von Gauß-Funktionen	163
A.2	Komplexe Wavelets	164
A.2.1	Komplexe Gabor-Wavelets	164
A.2.2	Daubechies–Grossman–Meyer-Wavelets	167
A.2.3	Das Paul-Wavelet	167
B	Die Software	171
B.1	Implementierte Wavelets	172
B.2	Die skalare Wavelettransformation	173
B.2.1	Die Transformationen	173
B.2.1.1	<code>waveletTransformSpect</code>	173
B.2.1.2	<code>scaledInverseWaveletTransformSpect</code>	174
B.2.2	Hilfstransformationen	175
B.2.2.1	<code>integerUpsampling</code>	175
B.2.2.2	<code>upsRep</code>	175
B.2.2.3	<code>deRepTransform</code>	176
B.2.2.4	<code>reRepTransform</code>	176
B.2.3	Hilfsfunktionen	177
B.2.3.1	<code>computeUpsRepDispValues</code>	177
B.2.3.2	<code>computeUpsRepReconstructValues</code>	178
B.2.3.3	<code>L1norm</code>	178
B.2.3.4	<code>L2norm</code>	178
B.2.3.5	<code>L2hnorm</code>	179
B.2.4	Interne Hilfsfunktionen	179

B.2.4.1	determineScalesPerOctave	179
B.2.4.2	scalesFrequenciesAndSpectra	180
B.2.4.3	trapezoidalQuadRandomNodes	180
B.3	Die Matrixwavelet-Transformation	181
B.3.1	Definition von Matrixwavelets	181
B.3.2	Transformation und inverse Transformationen	181
B.3.2.1	matrixWaveletTransformSpect	181
B.3.2.2	changeableFactors...	182
B.3.2.3	unscaledInverse...	183
B.3.2.4	noTransposeUnscaledInverse...	184
B.3.2.5	diagonalUnscaledInverse...	184
B.3.2.6	fastDiagonalUnscaledInverse...	184
B.3.3	Funktionen zur Bestimmung der Zulässigkeitsmatrix	185
B.3.3.1	matrixCPsiSpect	185
B.3.3.2	noTransposeMatrixCPsiSpect	186
B.3.3.3	diagonalMatrixCPsiSpect	186
B.3.3.4	fastDiagonalMatrixCPsiSpect	186
B.3.3.5	lookupMatrixCPsiSpect	187
B.3.4	Hilfstransformationen	187
B.3.4.1	matrixIntegerUpsampling	187
B.3.4.2	matrixUpsRep	188
B.3.4.3	matrixDeRepTransform	188
B.3.4.4	matrixReRepTransform	189
B.3.4.5	matrixUpsPad	189
B.3.5	Interne Hilfsfunktionen	190
B.3.5.1	matrixScalesFrequenciesAndSpectra	190
B.3.5.2	cachedFeval	192
B.3.5.3	cachedCentreFrequencySpect	193
C	Begriffe, Symbole und Rechenregeln	195
C.1	Glossar medizinischer Fachbegriffe	195
C.2	Im Text verwendete Symbole	196
C.3	Rechenregeln für die Fouriertransformation	197

Kapitel 1

Einleitung und Übersicht

Die kontinuierliche Wavelettransformation zu Signalen $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ und Wavelets $\psi \in \mathcal{L}_2(\mathbb{C})$,

$$W_\psi f(s, t) := \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi\left(\frac{\tau - t}{s}\right)} f(\tau) d\tau,$$

die das Signal f in den Dimensionen Zeit *und* Frequenz zerlegt und daher ein deutlich vielseitigeres Werkzeug darstellt als beispielsweise die Fouriertransformation, wird in vielen Büchern – zum Beispiel in [Bla98], [Mal99], [Hol98] und [Dau92] – direkt am Anfang eingeführt, wohl nicht zuletzt deshalb, weil sich ihre grundlegende Theorie vergleichsweise übersichtlich darstellen lässt.

Wegen der hochredundanten Repräsentation des Signals in der transformierten ist jedoch schon die Transformation selbst vergleichsweise rechenaufwendig, und eine Analyse kommt daher nur für einige zehntausend Abtastwerte in Frage, was im Vergleich zu den anfallenden Datenmengen, gerade bei hochauflösenden Messungen, vergleichsweise wenig ist.

Die Filterung und Synthese von Signalen mittels der kontinuierlichen Transformation sind noch einmal aufwendiger, da für die Berechnung der Inversen numerische Quadraturverfahren zum Einsatz kommen müssen.

Daher führt die kontinuierliche Wavelettransformation im Vergleich zu ihrem diskreten Gegenstück bislang ein Schattendasein und wird bestenfalls in der Signalanalyse als eine Art „bildgebendes Verfahren“ benutzt, da sich aus ihrer graphischen Darstellung recht intuitiv die Eigenschaften von Signalen erschließen.

Trotz des zu betreibenden Aufwands kann die kontinuierliche Wavelettransformation jedoch für die Anwendung ein willkommenes Werkzeug sein, denn selbst für einen Experten sind die extrem ausgedünnten Datensätze, die die diskrete Wavelettransformation produziert, kaum zu interpretieren,

während sich im kontinuierlichen Fall schon aus der reinen Betrachtung der Transformaten als Graphik nützliche Interpretationen hinsichtlich dessen, was ist, und *vielleicht wichtiger noch, dessen, was eigentlich nicht so sein sollte*, ergeben.

Um die kontinuierliche Wavelettransformation und ihre Inverse gewinnbringend einsetzen zu können, gibt es jedoch – ganz abseits des Programieraufwands – auch in mathematischer Hinsicht einiges zu tun:

So sind zum Beispiel alle theoretischen Erkenntnisse zur perfekten Rekonstruktion von Signalen wenig wert, wenn sie sich auf Skalenbereiche oder gar Zeiträume von jeweils unendlicher Ausdehnung beziehen, denn natürlich können in der Anwendung *nur endliche Mengen* von Datenpunkten betrachtet werden.

Es sind also zunächst Abschätzungen hinsichtlich der Abschneidefehler nötig, die entstehen, wenn eine genäherte Inverse vom Typ

$$\frac{2}{c_\psi} \int_{S_\perp}^{S_\top} \Re \left(\int_{\mathbb{R}} W_\psi f(s, u) \psi_s(t - u) du \right) \frac{ds}{s^2}$$

für Intervalle $[S_\perp, S_\top] \subset (0, \infty)$ statt der vollständigen Inversen

$$\frac{2}{c_\psi} \int_0^\infty \Re \left(\int_{\mathbb{R}} W_\psi f(s, u) \psi_s(t - u) du \right) \frac{ds}{s^2}$$

berechnet wird.

Während das Verhalten von $W_\psi f(s, t)$ für $s \rightarrow 0$ gut untersucht ist, da es sich vor allem aus der Differenzierbarkeit von f an der Stelle t ableitet, sind Untersuchungen für den Fall $s \rightarrow \infty$ in der gängigen Literatur bislang kein Thema.

Sind diese Fragen beantwortet, so ist auch für die numerische Quadratur zu klären, wie die Eigenschaften von Wavelet und Signal die Ableitungen der Wavelettransformaten in Skalenrichtung, $\frac{\partial^n}{\partial s^n} W_\psi f(s, t)$, beeinflussen, wobei die Ergebnisse glücklicherweise so ausfallen, dass der Verwendung einfacher Quadraturformeln nichts im Wege steht. Darüber hinaus kann in der Invertierung auf eine erneute aufwendige Faltungsoperation verzichtet werden, wenn man statt eines Wavelets die Dirac-Distribution $\delta(t)$ und ein entsprechend angepasstes c_ψ zur Rücktransformation benutzt; wenngleich auf Kosten der numerischen Stabilität. Alle diese Betrachtungen stehen im Zentrum von Kapitel 3.

Sind alle diese Probleme gelöst, so kann die kontinuierliche Wavelettransformation zum Beispiel zur Filterung von artefaktbehafteten Daten eingesetzt werden, was in der vorliegenden Arbeit am Beispiel von Elektroenzephalogrammdaten gezeigt wird, die erhoben wurden, während gleichzeitig die

Veränderungen der cerebralen Durchblutung mit einem Magnetresonanztomographen beobachtet wurden. Solche Daten sind mit starken Artefakten behaftet, deren Entstehungsmechanismus bislang nur zum Teil geklärt ist und für deren Entfernung mehrere Verfahren vorgeschlagen wurden, von denen leider nur eines weite Verbreitung gefunden hat, so dass ein Vergleich auch nur mit diesem möglich war. Für einen analysierten Testdatensatz lieferte das Waveletverfahren jedoch im Vergleich deutlich bessere Ergebnisse; diese werden in Kapitel 4 präsentiert.

Die oben betrachteten Daten wurden kanalweise als skalare Zeitreihen analysiert und bereinigt, was im gegebenen Zusammenhang auch sinnvoll ist, denn die Artefakte schwanken stark von Kanal zu Kanal. Jedoch werden im allgemeinen 30 oder mehr Kanäle EEG parallel aufgezeichnet und zwischen diesen bestehen durchaus auch systematische Zusammenhänge, so dass eine *simultane Analyse aller Kanäle* wünschenswert wäre.

Gesucht wäre also die Theorie zu einer Transformation, die *vektorwertige* Signale $f \in \mathcal{L}_2^n(\mathbb{R})$, $n > 1$, ähnlich wie oben in den Dimensionen Zeit und Frequenz zerlegt und dabei noch in der Lage sein sollte, modellierte oder erkannte Zusammenhänge zwischen den einzelnen Komponenten zu berücksichtigen. Dies wird möglich durch die Matrixwavelet-Transformation,

$$W_\Psi f(s, t) := \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\Psi\left(\frac{\tau - t}{s}\right)} \cdot f(\tau) d\tau,$$

die das (*spalten*)vektorwertige Signal f mit Hilfe eines *matrixwertigen* (Links)-Wavelets Ψ transformiert und zwar so, dass das Signal analog zum skalaren Fall aus der Transformierten zurückgewonnen werden kann. Für die Invertierung ergeben sich ganz natürlich sogar mehrere Varianten, von denen die für den jeweiligen Kontext günstigste gewählt werden kann.

Die Theorie der Matrixwavelet-Transformation wird in den Kapiteln 5 bis 7 dargelegt, mit einigen zusätzlichen Betrachtungen der numerischen Stabilität in Kapitel 8. Auch hier wird die entwickelte Theorie in einer Anwendung geprüft, indem in Kapitel 9 die Matrixwavelet-Transformation benutzt wird, um für einen anderen Datensatz aus der Gehirnforschung topographische Aktivierungsmuster, die Dimensionalität des Datensatzes, sowie die Form der einzelnen Komponenten zu untersuchen.

Es stellt sich dabei heraus, dass sich das Ergebnis der Matrixwavelet-Transformation hervorragend eignet, um über eine Hauptkomponentenanalyse weiter untersucht zu werden und gerade die Tatsache, dass bereits *in der Transformation* eventuelle Zusammenhänge zwischen den Datenkanälen berücksichtigt werden können, ermöglicht im Zusammenhang mit der Hauptkomponentenanalyse einen einfachen Vergleich verschiedener Modelle des Zusammenhangs.

Dabei ist jedoch zu bemerken, dass hier ein völlig neues Terrain betreten wird und eine Vergleichbarkeit der gewonnenen Erkenntnisse mit den bereits vorhandenen Analyseergebnissen für diesen Datensatz nur sehr eingeschränkt gegeben ist. Immerhin wird ein erster Einblick gewonnen, wie sich die signifikanten Ergebnisse im Einsatz verschiedener Matrixwavelets am gleichen Datensatz verändern.

Den Abschluss der Arbeit bilden drei Anhänge, in denen die Eigenschaften verschiedener kontinuierlicher Wavelets betrachtet, die Benutzung der entwickelten Software dokumentiert und medizinische Fachbegriffe erklärt werden.

Kapitel 2

Grundlagen

In diesem Kapitel werden einige grundlegende Sätze über Normen und die kontinuierliche Fouriertransformation wiederholt.

2.1 Die Fouriertransformation

Eine grundlegende Transformation, die im weiteren Verlauf immer wieder Anwendung finden wird, ist die Fouriertransformation. Im Folgenden sind einige wichtige Sätze und Rechenregeln angegeben.

Definition 1 Sei $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{C})$, dann ist seine *Fouriertransformation* gegeben durch

$$\hat{f}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt.$$

Die Fouriertransformation hat einige interessante Eigenschaften, die hier – ohne Beweis – aufgeführt werden; die Details lassen sich beispielsweise in [Mal99] nachlesen:

Für $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{C})$ ist

$$\left| \hat{f}(\omega) \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt = \|f\|_1.$$

Ist zu $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{C})$ auch $F := \hat{f} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{C})$, dann gilt auch

$$f(t) = \check{F}(t) := \left(\hat{f}(t) \right)^\vee := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

sowie

$$f^{\wedge\wedge}(\xi) = 2\pi \cdot f(-\xi). \quad (2.1)$$

Es folgt weiter, dass für $\hat{f} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{C})$ die Funktion f gleichmäßig stetig und beschränkt ist.

Satz 1 (Parseval) [Mal99, S. 26] Für $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{C}) \cap \mathcal{L}_2(\mathbb{C})$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)} \cdot g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{f}(\omega)} \cdot \widehat{g}(\omega) d\omega.$$

Die Definition der Fouriertransformation lässt sich durch ein einfaches Dichteargument auch auf $\mathcal{L}_2(\mathbb{C})$ ausdehnen, wobei die obigen Sätze und insbesondere der Satz von Parseval gültig bleiben und es folgt hier weiter, dass

$$\|\widehat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi} \cdot \|f\|_2.$$

Da im weiteren Text gelegentlich auf Faltungen und Korrelationen zurückgegriffen wird, sollen diese hier noch kurz definiert und der Zusammenhang zwischen Zeit- und Frequenzbereich erläutert werden.

Definition 2 Seien $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{C})$ Funktionen, dann ist ihre *Faltung* definiert durch¹

$$f \star g(t) := \int_{\mathbb{R}} f(t - \tau) g(\tau) d\tau,$$

ihre *Korrelation* durch

$$f * g(t) := \int_{\mathbb{R}} f(\tau + t) \overline{g(\tau)} d\tau$$

und der zur Korrelation verwandte Operator $\bar{*}$ durch

$$f \bar{*} g(t) := \int_{\mathbb{R}} \overline{f(\tau - t)} g(\tau) d\tau. \quad (2.2)$$

Für die Fouriertransformierten ergibt sich mit dem Satz von Fubini durch kurze Rechnung

- für die Faltung

$$\widehat{f \star g}(\omega) = \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega),$$

- für die Korrelation

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(t + \tau) \overline{g(\tau)} d\tau \cdot e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(t + \tau) e^{-i\omega(t + \tau)} d\tau \overline{g(\tau)} e^{i\omega \tau} dt \\ &= \widehat{f}(\omega) \cdot \overline{\widehat{g}(\omega)} \end{aligned}$$

¹Die Notation für die Faltung folgt an dieser Stelle [Mal99], andere Autoren definieren auch $*$ als Faltungs- und \star als Korrelationsoperator.

- und für $\bar{*}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \widehat{f \bar{*} g}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \overline{f(\tau - t)} g(\tau) d\tau \cdot e^{-i\omega t} dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \overline{f(\tau - t)} e^{-i\omega(t-\tau)} d\tau g(\tau) e^{-i\omega\tau} dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \overline{f(\tau - t)} e^{-i\omega(\tau-t)} d\tau \hat{g}(\omega) \\
 &= \overline{\hat{f}}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega).
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Auch die Faltungs- und Korrelationsoperatoren lassen sich problemlos auf \mathcal{L}_2 übertragen, und speziell der $\bar{*}$ -Operator wird für die Matrixwavelet-Transformation wichtig sein.

Tabelle C.3 auf Seite 197 stellt noch einmal die wichtigsten Rechenregeln für die Fouriertransformation zusammen.

Satz 2 (Youngsche Ungleichung) [Hol98] Für eine Faltung von zwei Funktionen s und r gilt:

$$\|s \star r\|_w \leq \|s\|_p \|r\|_q \quad \text{mit } 1 + \frac{1}{w} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \quad 1 \leq p, q, w \leq \infty.$$

Kapitel 3

Die skalare Wavelettransformation

3.1 Grundbegriffe

Definition 3 Sei ψ eine Funktion mit skalarem Argument und seien $s, u \in \mathbb{R}$, dann sind $\psi_{s,u}$ und ψ_s definiert durch

$$\psi_{s,u} := \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi \left(\frac{\cdot - u}{s} \right)$$

und

$$\psi_s := \psi_{s,0}.$$

Für $\psi \in \mathcal{L}_1$ gilt

$$\hat{\psi}_s = |s|^{1/2} \cdot \hat{\psi}(s\omega). \quad (3.1)$$

Definition 4 Eine Funktion $\psi \in \mathcal{L}_2$ mit $\|\psi\|_2 = 1$, die die Bedingung

$$0 < c_\psi := \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$$

erfüllt, heißt *Wavelet* und das dazugehörige c_ψ heißt *Zulässigkeitskonstante*.

Insbesondere gilt für $s \in \mathbb{R}^*, u \in \mathbb{R}$ und jedes Wavelet ψ

$$\|\psi_{s,u}\|_2 = 1, \quad (3.2)$$

wie man leicht nachrechnet.

Definition 5 Sei $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ und ψ ein Wavelet, dann heißt

$$W_\psi f(s, t) := \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi\left(\frac{\tau - t}{s}\right)} f(\tau) d\tau$$

die Wavelettransformation von f zum Wavelet ψ , der Skala s und der Zeit t .

Satz 3 (Calderón, Grossmann, Morlet) [Mal99, S. 81]

Seien $f, \psi \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, dann gilt

$$f(t) = \frac{2}{c_\psi} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{s}} W_\psi f(s, u) \psi\left(\frac{t - u}{s}\right) du \frac{ds}{s^2}. \quad (3.3)$$

Satz 4 (Isometrie) [Mal99, S. 82, 86] Die Wavelettransformation zu einem beliebigen Wavelet $\psi \in \mathcal{L}_2(\mathbb{C})$ ist eine Isometrie.

3.2 Unschärfe und Momentanfrequenz

In [Mal99, S. 69, 75ff., 84ff., 91ff., 102ff.] werden analytische¹ Wavelets behandelt und für diese einige nützliche Sätze über ihre Fähigkeit bewiesen, in einem Signal nur kurzfristig auftretende sinusförmige Abschnitte hinsichtlich ihrer Phase² und der so genannten Momentanfrequenz zu analysieren. Die dort gewonnenen Erkenntnisse werden im folgenden zusammengefasst:

Definition 6 (Daubechies) Eine Funktion $f \in \mathcal{L}_2$ heißt *analytisch*, wenn $\forall \omega < 0 : \hat{f}(\omega) = 0$.

Da Funktionen genau dann reell sind, wenn sie bezüglich des Ursprungs ein konjugiert symmetrisches Spektrum haben, sind analytische Funktionen notwendigerweise komplex, sie werden jedoch schon durch ihren Realteil vollständig beschrieben. Sei $g := \Re(f)$, dann gilt

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\hat{g}(\omega) + \hat{g}(-\omega)}{2} \Leftrightarrow \hat{g}(\omega) = \begin{cases} 2\hat{f}(\omega) & \text{für } \omega \geq 0 \\ 0 & \text{für } \omega < 0 \end{cases}.$$

¹Dieser Begriff hat *nichts* mit analytischen Funktionen im Sinne der komplexen Analysis zu tun. Er wurde mit der unten folgenden Definition bei Mallat [Mal99, S. 84] und Daubechies [Dau92, S. 27] benutzt, während bei Holschneider [Hol98, S. 10] solche Funktionen als *progressiv* bezeichnet werden.

²Was der Begriff „Phase“ im Kontext der Waveletanalyse bedeutet, ist nicht vollständig geklärt. Für rein sinusförmige Signale und komplexe Wavelets entspricht sie der Phase aus der Fouriertransformation [Kle03, Bemerkung 3], für Gabor-Wavelets und Signale aus der Praxis mit einigermaßen „gutartigem“ Phasenverhalten kann die von der Fouriertransformation gewohnte Phase zumindest gut geschätzt werden [DWCZ05].

Satz 5 (Mallat) *Sei f eine reelle Funktion und ψ ein analytisches Wavelet, dann gilt*

$$f(t) = \frac{2}{c_\psi} \Re \left(\int_0^\infty \int W_\psi f(s, u) \psi_s(t - u) du \frac{ds}{s^2} \right)$$

und

$$\|f\|_2^2 = \frac{2}{c_\psi} \int_0^\infty \int |W_\psi f(s, u)|^2 du \frac{ds}{s^2}.$$

Da sich für reelle Wavelets sowohl die Hin- als auch die Rücktransformation ausschließlich im Reellen abspielen, entspricht die oben angegebene Rekonstruktionsformel exakt der aus Satz 3. Zur Rekonstruktion einer reellen Funktion mit einem komplexen Wavelet muss allerdings noch der Imaginärteil unterdrückt werden. Dieser ließe sich auch durch zusätzliche Betrachtung der negativen Skalen eliminieren, allerdings zum Preis eines verdoppelten Rechenaufwands.

Definition 7 Sei ψ eine analytische³ Funktion, dann heißt

$$\eta := \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \omega \left| \hat{\psi}(\omega) \right|^2 d\omega$$

die *zentrale Frequenz* von ψ .

Lemma 1 *Sei ψ eine analytische Funktion mit zentraler Frequenz η und sei $s \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt für die zentrale Frequenz η_ρ der Funktion $\rho := \sqrt{s} \hat{\psi}(s \cdot)^\vee$, dass $\eta_\rho = \eta/s$.*

BEWEIS Unter den gegebenen Voraussetzungen gilt

$$\begin{aligned} \eta_\rho &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \omega \left| \sqrt{s} \hat{\psi}(s\omega) \right|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{v}{s} \left| \sqrt{s} \hat{\psi}(v) \right|^2 \frac{dv}{s} \\ &= \frac{1}{s2\pi} \int_0^\infty v \left| \hat{\psi}(v) \right|^2 dv \\ &= \eta/s. \end{aligned}$$

■

³Die Funktion muss deswegen analytisch sein, weil η nur über positive Frequenzen berechnet wird und daher negative Frequenzanteile nicht berücksichtigt würden. Der einzige andere Fall, in dem die Definition außerdem noch sinnvoll bleibt, sind reelle Funktionen mit ihrem konjugiert symmetrischen Spektrum, allerdings werden diese im Folgenden nicht betrachtet, um Lemma 2 und Satz 6 nicht unnötig kompliziert zu machen.

Lemma 2 Sei ψ eine analytische Funktion mit zentraler Frequenz η und gebe es außerdem $\zeta \in \mathbb{R}^+$ mit $\hat{\psi}(\omega) = 0 \ \forall \omega \leq \zeta$, dann gilt für beliebiges $\lambda \in [-\zeta, \infty)$, dass die Funktion

$$\rho := \left(\hat{\psi}(\omega - \lambda) \right)^\vee$$

die zentrale Frequenz

$$\eta_\rho = \eta + \lambda \|\psi\|_2^2$$

hat.

BEWEIS Unter den gegebenen Voraussetzungen gilt

$$\begin{aligned} \eta_\rho &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \omega \left| \hat{\psi}(\omega - \lambda) \right|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (v + \lambda) \left| \hat{\psi}(v) \right|^2 dv \\ &= \eta + \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^\infty \left| \hat{\psi}(v) \right|^2 dv \\ &= \eta + \lambda \|\psi\|_2^2. \end{aligned}$$

■

Bemerkung 1 Da für ein Wavelet ψ gerade $\|\psi\|_2 = 1$ gilt, ist in diesem Fall $\eta_\rho = \eta + \lambda$.

Satz 6 Sei ψ ein analytisches Wavelet mit zentraler Frequenz η , dann gilt für beliebiges $\lambda \in [0, \infty)$, dass die Funktion

$$\rho := \sqrt{s} \left(\hat{\psi}((\omega - \lambda) \cdot s) \right)^\vee \text{ mit } s = \lambda/\eta + 1$$

ein analytisches Wavelet mit gleicher zentraler Frequenz wie ψ ist.

BEWEIS Da $\lambda \geq 0$ ist, ist zunächst $\hat{\psi}(\omega - \lambda) = 0 \ \forall \omega \leq 0$ und damit ist auch ρ eine analytische Funktion. Nach den Lemmata 1 und 2 gilt außerdem für die zentrale Frequenz η_ρ von ρ , dass

$$\eta_\rho = \frac{\eta + \lambda}{s} = \frac{\eta + \lambda}{\lambda/\eta + 1} = \eta \frac{\eta + \lambda}{\lambda + \eta} = \eta.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \|\hat{\rho}\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left| \sqrt{s} \left(\hat{\psi}((\omega - \lambda) \cdot s) \right) \right|^2 d\omega \\ &= s \int_{\mathbb{R}} \left| \hat{\psi}((\omega - \lambda) \cdot s) \right|^2 d\omega \\ &= s \int_{\mathbb{R}} \left| \hat{\psi}(v) \right|^2 \frac{dv}{s} \\ &= \|\hat{\psi}\|_2^2 \end{aligned}$$

und damit $\|\rho\|_2 = \|\psi\|_2 = 1$.

Zu zeigen bleibt nun noch die Zulässigkeit. Für $\lambda = 0$ ist $\rho = \psi$ und daher trivialerweise zulässig. Ist $\lambda > 0$, so gilt

$$\begin{aligned} c_\rho &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\left| \sqrt{s} \hat{\psi}((\omega - \lambda) \cdot s) \right|^2}{|\omega|} d\omega = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{\left| \sqrt{s} \hat{\psi}((\omega - \lambda) \cdot s) \right|^2}{\omega} d\omega \\ &< \int_0^{\infty} \frac{\left| \sqrt{s} \hat{\psi}(\omega \cdot s) \right|^2}{\omega} d\omega = s \int_0^{\infty} \frac{\left| \hat{\psi}(v) \right|^2}{v/s} \frac{dv}{s} = s c_\psi, \end{aligned}$$

aber andererseits ist sicher $c_\rho \neq 0$ und damit ρ zulässig. \blacksquare

Die Zeit-Frequenz-Auflösung einer Wavelettransformation hängt davon ab, wie weit sich das Wavelet selbst im Zeitbereich und wie weit sich sein Spektrum im Frequenzbereich erstreckt. Zur skalierten und dilatierten Version eines Wavelets $\psi_{s,u}$ ergibt sich nach [Mal99, S. 85] im Zeitbereich

$$\int_{\mathbb{R}} (t - u)^2 |\psi_{s,u}(t)|^2 dt = s^2 \sigma_t^2, \quad \sigma_t^2 = \int_{\mathbb{R}} t^2 |\psi(t)|^2 dt \quad (3.4)$$

und im Frequenzbereich

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left(\omega - \frac{\eta}{s} \right)^2 \left| \hat{\psi}_{s,u}(\omega) \right|^2 d\omega = \frac{\sigma_\omega^2}{s^2}, \quad \sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} (\omega - \eta)^2 \left| \hat{\psi}(\omega) \right|^2 d\omega. \quad (3.5)$$

Definition 8 Sei ψ ein Wavelet. Der zu $\psi_{s,u}$ definierte Bereich mit Zentrum bei $(u, \eta/s)$ und Seitenlänge $s\sigma_t$ entlang der Zeit-, sowie σ_ω/s entlang der Frequenzachse heißt *Heisenberg-Box*.

Bemerkung 2 Obwohl die Seitenlängen der Heisenberg-Box variabel sind, ist ihre Fläche $s\sigma_t \cdot \sigma_\omega/s = \sigma_t \sigma_\omega$ immer gleich. Für kleine Skalen – entsprechend hohen Frequenzen – wird daher die Zeitauflösung der Wavelettransformation immer feiner bei gleichzeitig immer gröber werdender Frequenzauflösung. Für große Skalen – entsprechend kleinen Frequenzen – kehrt sich die Situation gerade um.

Bemerkung 3 Man überprüft mit den Formeln 3.5 und 3.4 leicht, dass sich durch Anwendung des obigen Satzes der Träger eines Wavelets auf eine gewünschte „Trennschärfe“ bei einer bestimmten Frequenz anpassen lässt.

Definition 9 Eine Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit $g(t) = g(-t)$ und $\|g\|_2 = 1$ heißt *Fensterfunktion*.

Da g reell und gerade ist, ist auch sein Spektrum reell und gerade und es gilt somit für $\omega \in \mathbb{R}$:

$$|\hat{g}(\omega)| = \left| \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-i\omega t} dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |g(t) e^{-i\omega t}| dt = \hat{g}(0). \quad (3.6)$$

Definition 10 Sei g eine Fensterfunktion mit kompaktem Träger, dann heißt $\Delta\omega(g) \in \mathbb{R}^+$ bestimmt durch die Gleichung

$$\arg \min_{\Delta\omega \in \mathbb{R}_0^+} : |\hat{g}(\omega)| = 0 \text{ für } |\omega| > \Delta\omega$$

die Bandbreite der Fensterfunktion. Ist die Fensterfunktion aus dem Zusammenhang klar, so wird statt $\Delta\omega(g)$ nur $\Delta\omega$ geschrieben.

Analytische Wavelets kann man nach [Mal99, S.87] einfach dadurch konstruieren, dass man eine Fensterfunktion mit einer komplexen harmonischen Schwingung multipliziert:

$$\psi(t) = g(t) \cdot e^{i\eta t}.$$

Für das Spektrum gilt dann

$$\hat{\psi}(\omega) = \hat{g}(\omega - \eta),$$

und aus Formel 3.6 folgt, dass $\arg \sup_{\xi} |\hat{\psi}(\xi)| = \eta$. Ist außerdem $\hat{g}(\omega) = 0$ für $|\omega| > \eta$, so ist $\hat{\psi}(\omega) = 0$ für $\omega < 0$ und das Wavelet damit analytisch.

Definition 11 Sei zu $\omega_0, \phi_0 \in \mathbb{R}$ und $\phi(t) := \omega_0 t + \phi_0$ eine Funktion $f(t) := a(t) \cos(\phi(t))$ gegeben. Die *Momentanfrequenz* $\omega(t)$ ist definiert als der Betrag der Ableitung von ϕ , also $\omega(t) := |\phi'(t)| \geq 0$.

Insbesondere schließt die obige Definition das eher kontraintuitive Konzept von „negativen“ Frequenzen aus.

Lemma 3 (Mallat) Sei g eine Fensterfunktion mit Träger $[-1/2, 1/2]$, sei $\|g\| = 1$ und außerdem $\psi(t) := g(t) \cdot e^{i\eta t}$. Sei weiter $\Delta\omega$ die Bandbreite von g , dann gilt für $\eta > \Delta\omega$, dass $\forall \omega < 0 : |\hat{\psi}(\omega)| = |\hat{g}(\omega - \eta)| = 0$. Damit ist ψ ein analytisches Wavelet, dessen dilatierte Versionen sich durch

$$\psi_{s,u}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) = g_{s,u,\xi}(t) \cdot e^{-i\xi u}$$

mit $\xi = \eta/s$ und

$$g_{s,u,\xi}(t) = \sqrt{|s|} g\left(\frac{t-u}{s}\right) \cdot e^{i\xi t}$$

schreiben lassen. Für $f(t) := a(t) \cos \phi(t)$ gilt dann

$$Wf(s, u) = \frac{\sqrt{|s|}}{2} a(u) \cdot e^{i\phi(u)} \cdot (\hat{g}(s(\xi - \phi'(u))) + \epsilon(u, \xi)), \quad (3.7)$$

wobei der Korrekturterm $\epsilon(u, \xi)$ vernachlässigbar wird, wenn die Veränderungen von $a(t)$ und $\phi'(t)$ innerhalb des effektiven Trägers von $\psi(s, u)$ klein sind, und wenn $\phi'(u) \geq \Delta\omega/s$.

Definition 12 Das *Skalogramm* einer Funktion f ist definiert durch

$$P_W f(\xi, u) := |Wf(s, u)|^2 = \left| Wf\left(\frac{\eta}{\xi}, u\right) \right|^2, \quad \xi = \eta/s \text{ (wie oben)}.$$

Definition 13 Das *normalisierte Skalogramm* einer Funktion f ist definiert durch

$$\frac{\xi}{\eta} P_W f(\xi, u) = \frac{|Wf(s, u)|^2}{|s|}, \quad \xi = \eta/s \text{ (wie oben)}.$$

Korollar 1 (Mallat) Ist in Lemma 3 der Korrekturterm $\epsilon(u, \xi)$ vernachlässigbar, so liegen die Maxima des normalisierten Skalogramms gerade bei $(u, \phi'(u))$, also der jeweiligen Momentanfrequenz zum Zeitpunkt ihres Auftretens vor.

Anschaulich bedeutet dies, dass in einem Signal vorübergehend auftauchende, cosinusförmige Schwingungen direkt „übersetzt“ werden in Maxima des normalisierten Skalogramms der Wavelettransformierten zu einem analytischen Wavelet. Diese Situation wird in Abbildung 3.1 illustriert. Umgekehrt bedeutet es natürlich auch, dass man für hinreichend einfache Signale das Skalogramm benutzen kann, um recht genau Zeit und Frequenz von transienten Ereignissen zu bestimmen. Hat man zudem noch Einfluss auf die Form der Transienten, so liefert Bemerkung 2 den Hinweis, dass hochfrequente Anteile zweckmäßig sind, wenn eine möglichst genaue Zeitbestimmung erreicht werden soll.

3.3 Abklingverhalten und Abschneidefehler

Das Ziel dieser theoretischen Betrachtungen ist eine numerische Implementierung der kontinuierlichen Wavelettransformation, die naturgemäß nicht alle

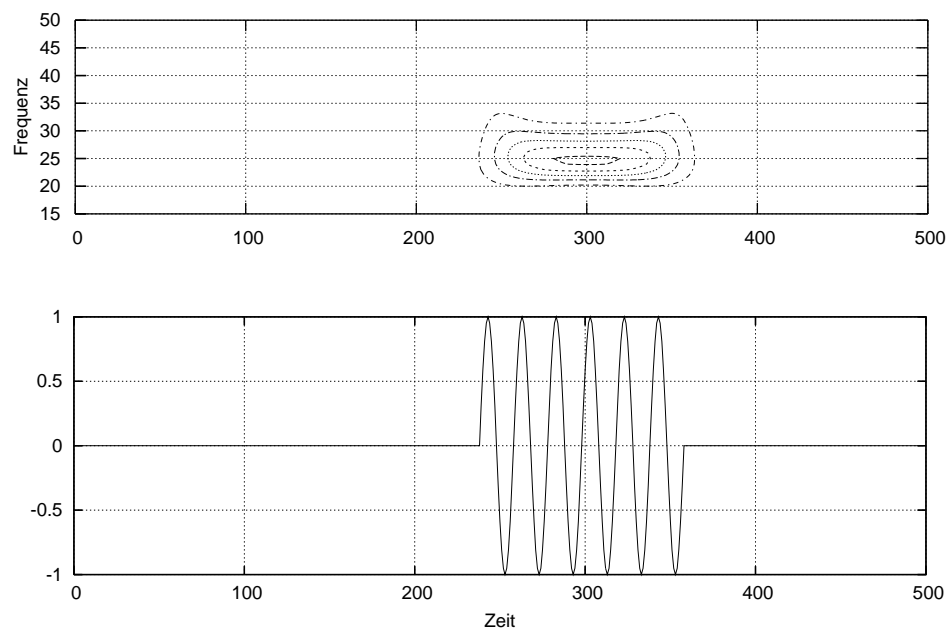


Abbildung 3.1: Die Idee der Momentanfrequenz: Eine kurze cosinusförmige Schwingung der Frequenz 25 taucht bei der entsprechenden Zeit und Frequenz als Maximum im Skalogramm der Gabor-Wavelettransformierten auf.

Skalen im Intervall $[0, \infty]$ betrachten kann, sondern eine *sinnvolle* Auswahl für die Berechnung treffen muss. Die Einschränkung des Skalenbereichs führt wiederum zu Fehlern in der Rekonstruktion, die quantifiziert werden müssen, um zu brauchbaren Ergebnissen für die Praxis zu kommen. Für die Schätzung des Fehlers durch das Beschneiden des Skalenbereichs ist es nützlich zu wissen, wie sich der Betrag der Wavelettransformation für $s \rightarrow 0$ und $s \rightarrow \infty$ verhält. Während der Fall $s \rightarrow 0$ gut untersucht ist, standen für $s \rightarrow \infty$, abgesehen von einigen allgemeinen Ergebnissen über die Beschränktheit von $|W_\psi f(s, t)|$ kaum Ergebnisse zur Verfügung. Die Youngsche Ungleichung ermöglicht jedoch, das Abklingverhalten für $s \rightarrow \infty$ unter sehr allgemeinen Bedingungen zu quantifizieren und für eine große Klasse von abgetasteten Signalen, nämlich all diejenigen, die vor ihrer Abtastung ein Hochpassfilter durchlaufen haben, wird Satz 13 eine schöne Abschätzung unter stärkeren Bedingungen liefern.

3.3.1 Abklingverhalten bei kleinen Skalen

Für $s \rightarrow 0$ finden sich entsprechende Ergebnisse in [Mal99, S. 163ff.], die hier kurz angegeben werden sollen:

Definition 14 Sei ψ ein Wavelet und $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$n = \max \left\{ k \in \mathbb{N} : \int_{-\infty}^{\infty} t^l \psi(t) dt = 0 \wedge 0 \leq l < k \right\},$$

dann heißt ψ ein *Wavelet mit n verschwindenden Momenten*.

Definition 15 Ein Wavelet $\psi \in C^n$, für das für alle $0 \leq k \leq n$ und $m \in \mathbb{N}$ ein K_m existiert, so dass $\forall t \in \mathbb{R} : |\psi^{(k)}(t)| \leq K_m / (1 + |t|^m)$ heißt *schnell fallend vom Grad n* .

Ein solches Wavelet und alle seine Ableitungen bis einschließlich der n -ten fallen also schneller als $1/(1 + |t|^m)$ gegen 0 für $t \rightarrow \infty$.

Die beiden folgenden Sätze verbinden das Abklingverhalten der Wavelettransformierten für $s \rightarrow 0$ mit der Anzahl n der verschwindenden Momente des Wavelets, sowie seiner eigenen Regularität und der Lipschitzstetigkeit der transformierten Funktion. Sei dazu jeweils ψ ein Wavelet mit n verschwindenden Momenten und schnell fallend vom Grad n :

Definition 16 (Mallat) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

1. *lipschitzstetig* vom Grad α in t , wenn es $C \in \mathbb{R}$ und ein Polynom p_t mit $\deg p = \lfloor \alpha \rfloor$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|f(x) - p_t(x)| \leq C \cdot |t - x|^\alpha$$

und

2. *gleichmäßig lipschitzstetig* vom Grad α über $[a, b] \subset \mathbb{R}$, wenn sie für jedes $t \in [a, b]$ lipschitzstetig vom Grad α mit *derselben* Konstanten C ist.

Satz 7 (Mallat) Wenn $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ *gleichmäßig lipschitzstetig* vom Grad $\alpha \leq n$ über $[a, b]$ ist, dann gibt es ein $A > 0$, so dass

$$|W_\psi f(s, t)| \leq A \cdot s^{\alpha+1/2} \quad \forall (s, t) \in \mathbb{R}^+ \times [a, b].$$

Satz 8 (Jaffard) Wenn $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ *lipschitzstetig* vom Grad $\alpha \leq n$ bei ξ ist, dann gibt es ein $A > 0$, so dass

$$|W_\psi f(s, t)| \leq A \cdot s^{\alpha+1/2} \left(1 + \left| \frac{t - \xi}{s} \right|^\alpha \right) \quad \forall (s, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$$

Satz 9 Die Konstante A in Satz 8 kann zu

$$2^\alpha K \cdot \max \left\{ \int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha |\psi(x)| dx, \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)| dx \right\}$$

bestimmt werden.

BEWEIS Im Beweis von Satz 8 in [Mal99, S. 171] wird die Abschätzung

$$|W_\psi f(s, t)| \leq K 2^\alpha \sqrt{s} \left(s^\alpha \int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha |\psi(x)| dx + |t - \xi|^\alpha \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)| dx \right)$$

benutzt. Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} |W_\psi f(s, t)| &\leq K 2^\alpha \sqrt{s} \left(s^\alpha \int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha |\psi(x)| dx + |t - \xi|^\alpha \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)| dx \right) \\ &= K 2^\alpha s^{\alpha+1/2} \left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha |\psi(x)| dx}_{=: L} + \left| \frac{t - \xi}{s} \right|^\alpha \underbrace{\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)| dx}_{=: \tilde{L}} \right) \\ &\leq 2^\alpha K \max \{ L, \tilde{L} \} \cdot s^{\alpha+1/2} \left(1 + \left| \frac{t - \xi}{s} \right|^\alpha \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3.3.2 Abschneidefehler bei unvollständiger Transformation der kleinen Skalen

Mit den obigen Sätzen wird es nun möglich, Fehlerabschätzungen für die Rekonstruktion aus unvollständigen Transformationen anzugeben. Sei dazu wieder ψ ein Wavelet mit n verschwindenden Momenten und schnell fallend vom Grad n .

Satz 10 *Sei $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ lipschitzstetig vom Grad $\alpha \leq n$ bei ξ mit Lipschitzkonstante K und ψ ein Wavelet mit den oben bezeichneten Eigenschaften, dann gilt für $S_\perp \in \mathbb{R}^+$, dass*

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{S_\perp} \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(s, u) \psi_s(\xi - u) du \frac{ds}{s^2} \right| \\ & \leq 2^\alpha K \cdot \max \left\{ \int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha |\psi(x)| dx, \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)| dx \right\} \cdot \|\psi\|_1 \cdot \frac{S_\perp^\alpha}{\alpha}. \end{aligned}$$

BEWEIS Nach Satz 8 gilt zunächst $|W_\psi f(s, \xi)| \leq A \cdot s^{\alpha+1/2}$ und es folgt

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{S_\perp} \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(s, u) \psi_s(\xi - u) du \frac{ds}{s^2} \right| \\ & \leq \int_0^{S_\perp} \left| \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(s, u) \psi_s(\xi - u) du \right| \frac{ds}{s^2} \\ & \leq \int_0^{S_\perp} \left| \int_{\mathbb{R}} A \cdot s^{\alpha+1/2} \psi_s(\xi - u) du \right| \frac{ds}{s^2} \\ & \leq \int_0^{S_\perp} \int_{\mathbb{R}} |\psi_s(\xi - u)| \frac{A \cdot s^{\alpha+1/2}}{s^2} ds \\ & = \int_0^{S_\perp} \int_{\mathbb{R}} |\psi(t)| \sqrt{|s|} dt \cdot A \cdot s^{\alpha-3/2} ds \\ & = \int_{\mathbb{R}} |\psi(t)| dt \cdot A \cdot \left[\frac{s^\alpha}{\alpha} \right]_0^{S_\perp} \\ & = A \cdot \|\psi\|_1 \cdot \frac{S_\perp^\alpha}{\alpha}. \end{aligned}$$

Einsetzen der Abschätzung aus Satz 9 liefert die Behauptung. ■

3.3.3 Abklingverhalten bei großen Skalen

Für große Skalen ergeben sich einige einfache Folgerungen über Betrag und Abklingverhalten der Transformaten mit Hilfe der Youngschen Ungleichung:

Ganz allgemein lässt sich zeigen, dass die Wavelettransformierte wenigstens beschränkt sein muss, und für eine speziellere Wahl von f und ψ lässt sich auch zeigen, dass sie für $s \rightarrow \infty$ abklingt.

Korollar 2 Sei $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ und ψ ein Wavelet, dann gilt

$$|W_\psi f(s, t)| \leq \sup_{s \geq 0} \|W_\psi f(s, \cdot)\|_\infty \leq \|f\|_2.$$

BEWEIS Für beliebige $s \in \mathbb{R}_0^+, t \in \mathbb{R}$ gilt nach Satz 2, dass

$$|W_\psi f(s, t)| \leq \|W_\psi f(s, \cdot)\|_\infty \leq \|\psi\|_2 \cdot \|f\|_2.$$

Gleichung 3.2 liefert darüber hinaus $\|\psi_{s,\cdot}\|_2 = 1 \forall s > 0$ und $\|f\|_2$ hängt ohnehin nicht von s ab. Damit folgt die Behauptung. ■

Korollar 3 Sei $f \in (\mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_1)(\mathbb{R})$ und $\psi \in \mathcal{L}_\infty$ ein Wavelet, dann gilt

$$\lim_{s \rightarrow \infty} |W_\psi f(s, t)| = 0 \quad \text{für fast alle } t \in \mathbb{R}.$$

BEWEIS Sei $S := \|\psi\|_\infty$. Nach Satz 2 gilt zunächst für alle $s \in \mathbb{R}^+$, dass

$$|W_\psi f(s, \cdot)| \leq \|W_\psi f(s, \cdot)\|_\infty \leq \|\psi_{s,\cdot}\|_\infty \cdot \|f\|_1.$$

Mit $\psi_{s,\cdot} = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{\cdot}{s}\right)$ folgt nun $\|\psi_{s,\cdot}\|_\infty = \|\psi_{1,\cdot}\|_\infty / \sqrt{|s|}$, daher ist $\|\psi_{s,\cdot}\|_\infty$ sogar eine streng monoton fallende Funktion in s und für beliebiges $\epsilon > 0$ ist $\|\psi_{s,\cdot}\|_\infty < \epsilon$ für alle $s > (\|\psi_{1,\cdot}\|_\infty / \epsilon)^2$. Also ist $\lim_{s \rightarrow \infty} \|\psi_{s,\cdot}\|_\infty = 0$ und es folgt die Behauptung. ■

3.3.4 Abschneidefehler bei unvollständiger Transformation der großen Skalen

Auch mit diesen Sätzen wird es möglich, Fehlerabschätzungen für die Rekonstruktion aus unvollständigen Transformationen anzugeben, und zwar sowohl für $f \in \mathcal{L}_2$, als auch für $f \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$.

Satz 11 Sei $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ und ψ ein reelles oder analytisches Wavelet, dann gilt für $S_\top \in \mathbb{R}^+$, dass

$$\left| \int_{S_\top}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(s, u) \psi_s(t - u) du \frac{ds}{s^2} \right| \leq \frac{\|f\|_2}{S_\top}.$$

BEWEIS Mit der Youngschen Ungleichung und Gleichung 3.2 ergibt sich zunächst, dass für alle $s \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_{\mathbb{R}} W_{\psi} f(s, u) \psi_s(\cdot - u) du \right\|_{\infty} \\
&= \|f \star \overline{\psi_{-s}} \star \psi_s\|_{\infty} \\
&\leq \|f\|_2 \cdot \|\overline{\psi_{-s}} \star \psi_s\|_2 \\
&\leq \|f\|_2 \cdot \|\overline{\psi_{-s}}\|_2 \cdot \|\psi_s\|_2 \\
&= \|f\|_2.
\end{aligned}$$

Es folgt nun

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{S_{\top}}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} W_{\psi} f(s, u) \psi_s(t - u) du \frac{ds}{s^2} \right| \\
&\leq \int_{S_{\top}}^{\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} W_{\psi} f(s, u) \psi_s(t - u) du \right| \frac{ds}{s^2} \\
&\leq \int_{S_{\top}}^{\infty} \left\| \int_{\mathbb{R}} W_{\psi} f(s, u) \psi_s(\cdot - u) du \right\|_{\infty} \frac{ds}{s^2} \\
&\leq \|f\|_2 \int_{S_{\top}}^{\infty} \frac{ds}{s^2} \\
&= \frac{\|f\|_2}{S_{\top}}.
\end{aligned}$$

■

Satz 12 Sei $f \in (\mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_1)(\mathbb{R})$ und ψ ein reelles oder analytisches Wavelet, dann gilt für $S_{\top} \in \mathbb{R}^+$, dass

$$\left| \int_{S_{\top}}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} W_{\psi} f(s, u) \psi_s(t - u) du \frac{ds}{s^2} \right| \leq \frac{\|f\|_1}{S_{\top}}.$$

BEWEIS Nach Korollar 3 hier zusätzlich $\lim_{s \rightarrow \infty} |W_{\psi} f(s, t)| = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Mit der Youngschen Ungleichung und Gleichung 3.2 ergibt sich damit wieder, dass für alle $s \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_{\mathbb{R}} W_{\psi} f(s, u) \psi_s(\cdot - u) du \right\|_{\infty} \\
&= \|f \star \overline{\psi_{-s}} \star \psi_s\|_{\infty} \\
&\leq \|f\|_1 \cdot \|\overline{\psi_{-s}} \star \psi_s\|_{\infty} \\
&\leq \|f\|_1 \cdot \|\overline{\psi_{-s}}\|_2 \cdot \|\psi_s\|_2 \\
&= \|f\|_1.
\end{aligned}$$

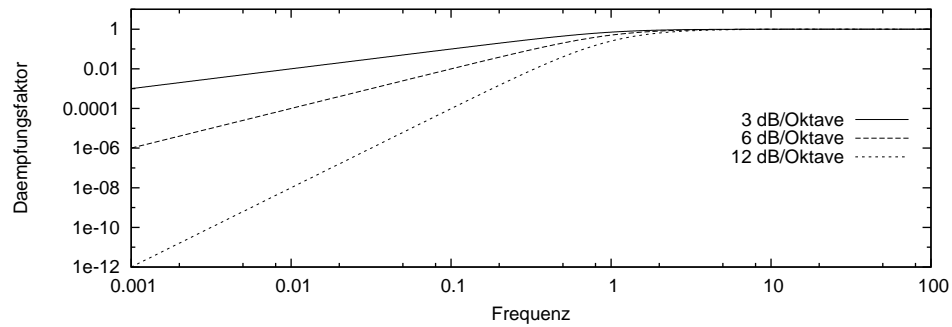


Abbildung 3.2: Kennlinien von RC-Hochpässen mit 3, 6 und 12 dB Dämpfung pro Oktave.

Mit dem entsprechend angepassten Argument aus dem Beweis von Satz 11 folgt nun die Behauptung. ■

Stärkere Voraussetzungen an die zu transformierende Funktion

Der folgende Satz liefert eine deutlich bessere Abschätzung für Funktionen, die nicht nur mittelwertfrei sind, sondern auch keine nennenswerten niederfrequenten Anteile besitzen und mit einer speziellen Klasse von Wavelets transformiert werden, zu denen zum Beispiel das Shannon- und das Meyer-Wavelet gehören, nämlich den Wavelets mit kompaktem Träger im Frequenzbereich.

Der Gedanke dahinter ist, dass viele digitalisierte Signale – zum Beispiel Audiosignale – vor ihrer Digitalisierung zunächst ein analoges Hochpassfilter durchlaufen, das in erster Linie Gleichspannungsanteile unterdrücken soll, aber auch die tiefen Frequenzen dämpft. Im einfachsten Fall handelt es sich dabei um eine einfache Kombination aus einem Widerstand R und einem Kondensator C , ein so genanntes *RC-Glied*, dessen Übertragungsfunktion die Form $h(\omega) = \omega RC / \sqrt{1 + (\omega RC)^2}$ hat. Die Dämpfung für $\omega \rightarrow 0$ wird in dB pro Oktave angegeben und beträgt in diesem Fall

$$\log_{10} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{h(\omega/2)}{h(\omega)} = \log_{10} 0.5 \approx 0.3 \hat{=} 3 \text{ dB}.$$

Sie entspricht im folgenden Satz dem Fall $p = 1$.

Durch Kaskadierung von RC-Gliedern lassen sich natürlich auch stärkere Dämpfungen erzielen, z.B. 6 dB und 12 dB, entsprechend $p = 2$ und $p = 4$. Abbildung 3.2 zeigt die entsprechenden Kennlinien.

Zunächst kann für Wavelets mit kompaktem Träger im Frequenzbereich zu jeder Skala die \mathcal{L}_2 -Norm der Wavelettransformierten abgeschätzt werden:

Lemma 4 *Sei ψ ein reelles oder analytisches Wavelet mit $\Omega := \text{supp } \hat{\psi}$ kompakt, $M := \max |\Omega|$, $\hat{\psi} \in \mathcal{L}_\infty(\Omega)$ und $\sigma := \text{ess sup}_{\omega \in \Omega} |\hat{\psi}(\omega)|$. Dann gilt*

$$\|W_\psi f(s, \cdot)\|_2^2 \leq \frac{1}{2\pi} \cdot |s| \sigma^2 \int_{\Omega/s} c^2 \cdot \omega^{2p} d\omega.$$

BEWEIS Für alle $s \in \mathbb{R}^+$ gilt, dass

$$\begin{aligned} \|W_\psi f(s, \cdot)\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \|\hat{W}_\psi f(s, \cdot)\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \|\hat{f} \cdot \hat{\psi}_{s, \cdot}\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\Omega/s} \left| \hat{f}(\omega) \cdot \frac{|s|}{\sqrt{|s|}} \hat{\psi}(s\omega) \right|^2 d\omega \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot |s| \sigma^2 \int_{\Omega/s} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot |s| \sigma^2 \int_{\Omega/s} c^2 \cdot \omega^{2p} d\omega. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Und mit dieser Abschätzung ergibt sich schließlich der folgende Satz:

Satz 13 *Sei ψ ein reelles oder analytisches Wavelet mit $\Omega := \text{supp } \hat{\psi}$ kompakt, $M := \max |\Omega|$, $\hat{\psi} \in \mathcal{L}_\infty(\Omega)$ und $\sigma := \text{ess sup}_{\omega \in \Omega} |\hat{\psi}(\omega)|$. Sei außerdem $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ mit $|\hat{f}(\omega)| \leq c \cdot \omega^p$ für ein $c > 0$, dann gilt:*

$$\left| \int_{S_\top}^\infty \int W_\psi f(s, u) \psi_s(t - u) du \frac{ds}{s^2} \right| \leq \frac{\sigma c}{2} \cdot \frac{(p+3)}{S_\top^{(p+3)}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{M^{2p+1}}{(2p+1)}}.$$

BEWEIS Für alle $s \in \mathbb{R}^+$ folgt mit Lemma 4, dass unter den gegebenen Voraussetzungen $\|W_\psi f(s, \cdot)\|_2 \leq \sigma c \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot |s| \int_{\Omega/s} \omega^{2p} d\omega}$ gilt.

Mit der Youngschen Ungleichung ergibt sich nun:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{S_{\top}}^{\infty} \int W_{\psi} f(s, u) \psi_s(t - u) du \frac{ds}{s^2} \right| \\
& \leq \int_{S_{\top}}^{\infty} \left| \int W_{\psi} f(s, u) \psi_s(t - u) du \right| \frac{ds}{s^2} \\
& \leq \int_{S_{\top}}^{\infty} \|W_{\psi} f(s, u) \star \psi_{s, \cdot}\|_{\infty} \frac{ds}{s^2} \\
& \leq \int_{S_{\top}}^{\infty} \|W_{\psi} f(s, u)\|_2 \cdot \|\psi_{s, \cdot}\|_2 \frac{ds}{s^2} \\
& \leq \int_{S_{\top}}^{\infty} \sigma c \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot |s| \int_{\Omega/s} \omega^{2p} d\omega} \cdot 1 \frac{ds}{s^2} \\
& = \sigma c \int_{S_{\top}}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega/s} \omega^{2p} d\omega} \cdot \frac{ds}{|s|^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Schließlich ergibt sich mit $M := \max |\Omega|$ das endgültige Ergebnis:

$$\begin{aligned}
\sigma c \int_{S_{\top}}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\Omega/s} \omega^{2p} d\omega} \cdot \frac{ds}{|s|^{3/2}} & \leq \sigma c \int_{S_{\top}}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{\omega^{2p+1}}{2p+1} \right]_{-M/s}^{M/s}} \cdot \frac{ds}{s^{3/2}} \\
& = \sigma c \int_{S_{\top}}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2M^{2p+1}}{s^{2p+1} \cdot (2p+1)}} \cdot \frac{ds}{s^{3/2}} \\
& = \sigma c \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{M^{2p+1}}{2p+1}} \int_{S_{\top}}^{\infty} s^{-(2p+1)/2} \cdot \frac{ds}{s^{3/2}} \\
& = \sigma c \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{M^{2p+1}}{2p+1}} \left[-\frac{2p+6}{2} s^{-(2p+6)/2} \right]_{S_{\top}}^{\infty} \\
& = \sigma c \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{M^{2p+1}}{2p+1}} \cdot \frac{2p+6}{2} S_{\top}^{-(2p+6)/2} \\
& = \frac{\sigma c}{2} \cdot \frac{(p+3)}{S_{\top}^{(p+3)}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{M^{2p+1}}{(2p+1)}}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Bemerkung 4 Die Voraussetzung $\hat{f}(\omega) \leq c \cdot \omega^p, c > 0$ stellt für alle in der Realität auftretenden Signale im Wesentlichen nur eine Bedingung an die *niedrigen* Frequenzen dar, da üblicherweise die Spektra von Signalen zu hohen Frequenzen hin ohnedies abklingen.

3.3.5 Abschneidefehler bei der Rücktransformation im Frequenzbereich

Die Formeln für die Abschneidefehler aus den vorherigen Abschnitten haben den nicht zu unterschätzenden Vorteil, dass sie punktweise Resultate liefern. Sie sind allerdings sperrig und eventuell sind nicht alle benötigten Parameter bekannt. Es lohnt sich daher, die Betrachtungen über den Abschneidefehler noch einmal im Frequenzbereich durchzuführen, vor allem auch im Hinblick auf die Ausführungen in Abschnitt 3.4.4.4 und letzten Endes wird sich ohne viel Mühe für jedes Wavelet der Frequenzgang eines Filters ergeben, dessen Eigenschaften von diesem Wavelet bestimmt werden. Seien dazu $f, \psi \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ ein Signal und ein Wavelet.

Da nach Satz 5

$$f = \frac{2}{c_\psi} \Re \left(\int_0^\infty \int W_\psi f(s, u) \psi_s(\cdot - u) du \frac{ds}{s^2} \right)$$

gilt⁴, ist natürlich auch

$$\hat{f} = \left(\frac{2}{c_\psi} \Re \left(\int_0^\infty \int W_\psi f(s, u) \psi_s(\cdot - u) du \frac{ds}{s^2} \right) \right)^\wedge.$$

Da sich im Frequenzbereich alle Faltungen in punktweise Produkte verwandeln, lässt sich die Fouriertransformation der inneren Klammer zunächst umschreiben zu

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^\infty \int W_\psi f(s, u) \psi_s(t - u) du \frac{ds}{s^2} \right)^\wedge \\ &= \int_0^\infty \left(\int \int \overline{\psi_s(\tau - t)} f(\tau) d\tau \psi_s(t - u) du \right)^\wedge \frac{ds}{s^2} \\ &= \int_0^\infty \left(\left(\int \overline{\psi_s(\tau - t)} f(\tau) d\tau \right)^\wedge \cdot \widehat{\psi_s} \right) \frac{ds}{s^2} \\ &= \int_0^\infty \left(\hat{f} \cdot \overline{\widehat{\psi_s}} \cdot \widehat{\psi_s} \right) \frac{ds}{s^2} \\ &= \hat{f} \cdot \int_0^\infty \overline{\widehat{\psi_s}} \cdot \widehat{\psi_s} \frac{ds}{s^2}. \end{aligned}$$

⁴Die Bildung des Realteils erspart das Integrieren über $(-\infty, 0)$ bei analytischen Wavelets.

Nun gilt jedoch

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^\infty \overline{\widehat{\psi}_s} \cdot \widehat{\psi}_s \frac{ds}{s^2} \right) (\omega) &= \int_0^\infty \left| \widehat{\psi}_s(\omega) \right|^2 \frac{ds}{s^2} \\
&= \int_0^\infty \frac{\left| \sqrt{s} \hat{\psi}(s\omega) \right|^2}{s^2} ds = \int_0^\infty \frac{\left| \hat{\psi}(s\omega) \right|^2}{s} ds \\
&= \int_0^\infty \frac{\left| \hat{\psi}(\xi) \right|^2}{\xi} d\xi \\
&= \begin{cases} c_\psi & \text{für analytisches } \psi \\ c_\psi/2 & \text{für reelles } \psi. \end{cases}
\end{aligned}$$

Der fehlende Faktor $1/2$ für analytisches ψ wird durch die Bildung des Realteils weiter oben kompensiert und letztendlich wird jede Frequenz des Ausgangssignals perfekt rekonstruiert. Für abgeschnittene große oder kleine Skalen sieht jedoch das Bild anders aus, denn für $0 < S_\perp < S_\top < \infty$ und $\omega, \tilde{\omega} \in \mathbb{R}^+$ kann durchaus

$$\int_{S_\perp}^{S_\top} \frac{\left| \hat{\psi}(\zeta\omega) \right|^2}{\zeta} d\zeta \neq \int_{S_\perp}^{S_\top} \frac{\left| \hat{\psi}(\zeta\tilde{\omega}) \right|^2}{\zeta} d\zeta$$

gelten; es ist also zu erwarten, dass nicht alle Frequenzen richtig rekonstruiert werden. Das Beispiel in Abbildung 3.3 zeigt das Ergebnis: Außerhalb eines Bandes von Frequenzen, die richtig rekonstruiert werden fällt die Rekonstruktionsqualität schnell gegen 0 ab.

Für eine gegebene Frequenz ω lässt sich der in Fehler durch das Abschneiden für jede Grenze abschätzen:

Satz 14 1. *Abschätzung für S_\top :*

Für $c, S_\top, \omega > 0$, $p > 1/2$ und $\zeta \geq S_\top$ sei $\left| \hat{\psi}(\zeta\omega) \right| \leq c \cdot \zeta^{-p}$. Dann ist

$$\int_{S_\top}^\infty \frac{\left| \hat{\psi}(\zeta\omega) \right|^2}{\zeta} d\zeta \leq \frac{c^2}{2p} \cdot S_\top^{-2p}.$$

Für diese Abschätzung sind brauchbare Ergebnisse zu erwarten, wenn $S_\top \gg 1$ ist und dieser Fall tritt in der praktischen Anwendung auch oft ein.

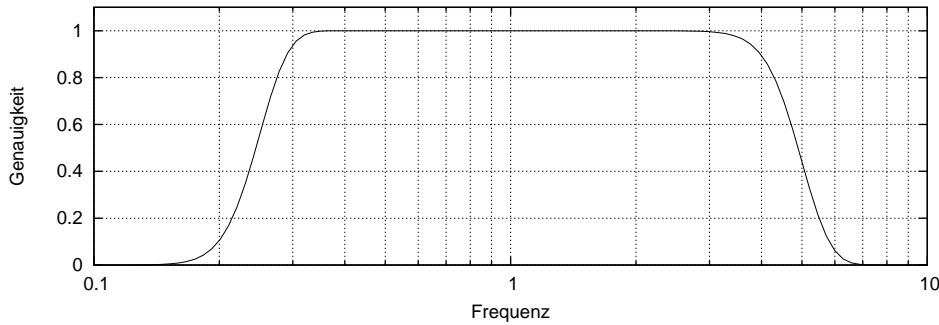


Abbildung 3.3: Auswirkungen des Beschneidens des Skalenbereichs auf $[1, 20]$ für Wavelettransformierte zum Morlet-Wavelet mit $\xi_0 = 5$: Nur Frequenzen ω innerhalb eines bestimmten Bandes (hier $\approx [0.35, \dots, 3]$) werden richtig rekonstruiert. Zur besseren Auflösung der tiefen Frequenzen ist die Frequenzachse logarithmisch skaliert.

2. Abschätzung für S_\perp :

Für $c, S_\perp, \omega > 0, p > 0$ und $\zeta \leq S_\perp$ sei $|\hat{\psi}(\zeta\omega)| \leq c \cdot \zeta^p$. Dann ist

$$\int_0^{S_\perp} \frac{|\hat{\psi}(\zeta\omega)|^2}{\zeta} d\zeta \leq \frac{c^2}{2p} \cdot S_\perp^{2p}.$$

BEWEIS Da der Beweis für beide Richtungen völlig analog läuft, wird hier nur 1. bewiesen.

Unter den gegebenen Voraussetzungen gilt

$$\begin{aligned} \int_{S_\top}^\infty \frac{|\hat{\psi}(\zeta\omega)|^2}{\zeta} d\zeta &\leq \int_{S_\top}^\infty \frac{|c \cdot \zeta^{-p}|^2}{\zeta} d\zeta \\ &= c^2 \cdot \int_{S_\top}^\infty \zeta^{-(2p+1)} d\zeta \\ &= \frac{c^2}{2p} \cdot S_\top^{-2p}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

3.3.6 Analyse und Synthese mit verschiedenen Wavelets

Der Rest dieses Abschnitts befasst sich mit einer allgemeineren Form der Waveletsynthese, die in der Literatur zwar immer wieder kurz erwähnt wird,

beispielsweise in [Far92, TC98] und [Hol98], aber trotz ihrer Bedeutung für eine extrem schnelle Rekonstruktion kaum nähere Beachtung findet. Zwar wäre eine allgemeine Implementierung *erheblich* aufwendiger, jedoch wird im weiter unten, in Bemerkung 6 beschriebenen Fall der Rekonstruktion mit der Diracschen Delta-Distribution die Implementierung ganz besonders einfach, allerdings um den Preis einer schwächeren Abschätzung für den Abschneidefehler.

Bemerkung 5 Betrachtet man die Rekonstruktionsformel aus Satz 5 im Frequenzbereich, so kann ohne Weiteres das ψ_s für die Rekonstruktion durch ein – auch verschiedenes – φ_s ersetzt werden und es ergibt sich für $\omega > 0$ folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
& \left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(s, u) \varphi_s(t - u) du \frac{ds}{s^2} \right)^\wedge (\omega) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi\left(\frac{\tau - u}{s}\right)} f(\tau) d\tau \cdot \varphi_s(t - u) \frac{ds}{s^2} \cdot e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi\left(\frac{\tau - u}{s}\right)} e^{-i\omega u + i\omega\tau} \cdot f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau du \cdot \hat{\varphi}_s(\omega) \frac{ds}{s^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi_s(\tau - u) e^{-i\omega(\tau - u)}} \cdot f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau du \cdot \hat{\varphi}_s(\omega) \frac{ds}{s^2} \\
&= \hat{f}(\omega) \cdot \int_0^\infty \overline{\hat{\psi}_s(\omega)} \cdot \hat{\varphi}_s(\omega) \frac{ds}{s^2} \\
&= \hat{f}(\omega) \cdot \int_0^\infty \overline{\hat{\psi}(s\omega)} \cdot \hat{\varphi}(s\omega) / |s| ds \\
&= \hat{f}(\omega) \cdot \int_0^\infty \frac{\overline{\hat{\psi}(\xi)} \cdot \hat{\varphi}(\xi)}{|\xi|} d\xi.
\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung $c_{\psi\varphi} := \int_0^\infty \frac{\overline{\hat{\psi}(\xi)} \cdot \hat{\varphi}(\xi)}{|\xi|} d\xi \neq 0$ werden also trotzdem alle Frequenzen in \hat{f} rekonstruiert, allerdings mit einer allgemeineren Zulässigkeitskonstante und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\hat{f} &= \frac{2}{c_{\psi\varphi}} \left(\Re \left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(s, u) \varphi_s(t - u) du \frac{ds}{s^2} \right) \right)^\wedge \\
&= \frac{1}{c_{\psi\varphi}} \left(\left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(s, u) \varphi_s(t - u) du \frac{ds}{s^2} \right)^\wedge \right. \\
&\quad \left. + \overline{\left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(s, u) \varphi_s(t - u) du \frac{ds}{s^2} \right)^\wedge} \right).
\end{aligned}$$

Es ist also möglich, *irgendwelche* Funktionen φ, ψ zu benutzen, für die das Integral $\int_0^\infty \widehat{\psi}(\xi) \cdot \widehat{\varphi}(\xi) / |\xi| d\xi$ existiert.

Bemerkung 6 Wählt man ψ so, dass bereits $\int_0^\infty \widehat{\psi}(\xi) / |\xi| d\xi$ existiert, so existiert insbesondere $\int_0^\infty \widehat{\psi}(\xi) \cdot \widehat{\delta}(\xi) / |\xi| d\xi$, wobei δ die Diracsche Delta-Distribution darstellt, und man kann die Synthese ohne jegliche Faltungsoperation durch einfache Integration der Wavelettransformierten über alle s durchführen, was zu einer erheblichen Beschleunigung führt.

Die Erkenntnis, dass Analyse und Synthese mit verschiedenen Wavelets funktionieren, erlaubt eine allgemeinere Version von Satz 12, die den Vorteil hat, dass die Normen der Wavelets gegebenenfalls unabhängig voneinander minimiert werden können.

Satz 15 Sei $f \in (\mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_1)(\mathbb{R})$, sowie $\varphi \in \mathcal{L}_1$ und $\psi \in \mathcal{L}_\infty$ reelle oder analytische Wavelets, dann gilt für $S_\top \in \mathbb{R}^+$, dass

$$\frac{\left| \int_{S_\top}^\infty \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(s, u) \varphi_s(t - u) du \frac{ds}{s^2} \right|}{c_{\psi\varphi}} \leq \frac{\|\psi\|_\infty \|\varphi\|_1 \|f\|_1}{c_{\psi\varphi} S_\top}.$$

BEWEIS Nach Korollar 3 gilt zunächst $\lim_{s \rightarrow \infty} |W_\psi f(s, t)| = 0$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$. Mit der Youngschen Ungleichung ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(s, u) \varphi_s(\cdot - u) du \right\|_\infty \\ & \leq \|W_\psi f(s, \cdot)\|_\infty \cdot \|\varphi_{s, \cdot}\|_1 \\ & \leq \|\psi_{1, \cdot}\|_\infty / \sqrt{|s|} \cdot \|f\|_1 \cdot \sqrt{|s|} \|\varphi_{1, \cdot}\|_1 \\ & = \|\psi\|_\infty \|\varphi\|_1 \|f\|_1 \end{aligned}$$

und es folgt für alle $S_\top \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{S_\top}^\infty \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(s, u) \varphi_s(t - u) du \frac{ds}{s^2} \right| \\ & \leq \int_{S_\top}^\infty \left\| \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(s, u) \varphi_s(\cdot - u) du \right\|_\infty \frac{ds}{s^2} \\ & \leq \|\psi\|_\infty \|\varphi\|_1 \|f\|_1 \int_{S_\top}^\infty \frac{ds}{s^2} \\ & = \frac{\|\psi\|_\infty \|\varphi\|_1 \|f\|_1}{S_\top}. \end{aligned}$$

Die Division beider Seiten der Ungleichung durch $c_{\psi\varphi}$ liefert schließlich das gewünschte Ergebnis. ■

So schön diese Formel auch sein mag, sie hat zwei Nachteile:

1. Die Normen beider Wavelets können nur unter der Nebenbedingung optimiert werden, dass sich $c_{\psi\varphi}$ nicht gleichzeitig wesentlich verkleinert, denn sonst werden nur Faktoren herum geschoben, aber keine Verbesserung erreicht.
2. Die Formel funktioniert nicht für $\varphi = \delta$, da $\delta \notin \mathcal{L}_p$ für $1 \leq p \leq \infty$. Hier muss auf eine schwächere Version zurückgegriffen werden, die ohne den Einfluss der beteiligten Wavelets auskommt, dafür allerdings auch nicht $f \in \mathcal{L}_1$ voraussetzt.

Satz 16 Sei $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, sowie φ und ψ reelle oder analytische Wavelets, dann gilt für $S_{\top} \in \mathbb{R}^+$, dass

$$\left| \int_{S_{\top}}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} W_{\psi} f(s, u) \varphi_s(t - u) du \frac{ds}{s^2} \right| \leq \frac{\|f\|_2}{S_{\top}}.$$

BEWEIS Mit der Youngschen Ungleichung und Gleichung 3.2 ergibt sich ähnlich wie oben, dass für alle $S_{\top} \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{\mathbb{R}} W_{\psi} f(s, u) \varphi_s(\cdot - u) du \right\|_{\infty} \\ & \leq \|W_{\psi} f(s, \cdot)\|_2 \cdot \|\varphi_{s, \cdot}\|_2 \\ & \leq \|f\|_2 \cdot \|\psi\|_2 \cdot \|\varphi\|_2 \end{aligned}$$

und das entsprechend angepasste Argument aus dem Beweis von Satz 15 schließt den Beweis ab. ■

3.4 Numerische Aspekte

Für die praktische Anwendung müssen die rein symbolischen Rechnungen der vorigen Abschnitte numerisch approximiert werden. Üblicherweise liegen schon die zu transformierenden Signale nur in abgetasteter Form, also *zeitdiskret* vor, was weitreichende Folgen für die Berechnung von Faltungen mit sich bringt. Darüber hinaus muss für eine *effiziente* Berechnung der Wavelettransformation auch der Raum der Skalen in geeigneter Weise diskretisiert werden. Der Einfluss dieser Diskretisierungen soll im Folgenden untersucht werden.

3.4.1 Abtastung von kontinuierlichen Signalen

Um ein Signal im Computer verarbeiten zu können, muss es abgetastet werden und insbesondere müssen die *Abtastzeitpunkte hinreichend dicht* liegen, um den gesamten Informationsgehalt des abgetasteten Signals zu erfassen. Man bezeichnet dabei den Abstand zwischen zwei Abtastzeitpunkten als *Abtastintervall*. Die folgenden Definitionen und Sätze wurden – gegebenenfalls mit leichten Anpassungen – aus [Mal99, S. 42 ff.] übernommen.

Definition 17 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $T \in \mathbb{R}$. Dann ist das mit Abtastintervall T abgetastete Signal f_d definiert durch

$$f_d(t) := \begin{cases} f(kT) & \text{für } t = kT \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offensichtlich kann $f_d(t) \neq 0$ nur dann eintreten, wenn $t \in T\mathbb{Z}$ gilt und obwohl für $t \in \mathbb{R}$ definiert, handelt es sich bei f_d eigentlich um eine Abbildung $f_d : T\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$. Die Fouriertransformierte von f_d ist nun lediglich noch eine Fourierreihe

$$\hat{f}_d(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_d(kT) \cdot e^{-i\omega kT},$$

die sich jedoch aus der Fouriertransformierten von f gewinnen lässt:

Satz 17 (Mallat) Die Fouriertransformation eines abgetasteten Signals f , das mit einem Abtastintervall T abgetastet wurde, berechnet sich durch

$$\hat{f}_d(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right).$$

Korollar 4 (Mallat) Das Spektrum einer mit Abtastintervall T abgetasteten Funktion ist $2\pi/T$ -periodisch.

3.4.2 Die diskrete Fouriertransformation

Wie schon für kontinuierliche Signale gibt es auch für zeitdiskrete Signale eine Fouriertransformation, die insbesondere für *endliche* Signale sehr schnelle Implementierungen erlaubt. Dazu betrachtet man Signale, die auf einer endlichen Menge $\mathbb{Z}_n := \{0, \dots, n-1\}$ definiert sind und periodisch auf ganz \mathbb{Z} fortgesetzt werden. Diesen wird ein Spektrum zugeordnet, das ebenso auf \mathbb{Z}_n existiert und auf ganz \mathbb{Z} periodisch fortgesetzt wird. Auch die folgenden Definitionen und Sätze wurden – gegebenenfalls mit leichten Anpassungen – aus [Mal99, S. 54 ff.] übernommen.

Definition 18 Für $n \in \mathbb{N}$ heißt eine Abbildung $f : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{R}$ *endliches, zeitdiskretes Signal der Länge n* .⁵

Definition 19 Für $n \in \mathbb{N}$ heißt eine Abbildung $F : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C}$ *endliches, frequenzdiskretes Spektrum der Länge n* .

Analog zur kontinuierlichen Fouriertransformation definiert man für zeitdiskrete Signale die diskrete Fouriertransformation:

Definition 20 Sei f ein endliches, zeitdiskretes Signal der Länge n , dann heißt zu $\omega \in \mathbb{Z}_n$

$$\hat{f}(\omega) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-i2\pi\omega k/n} \cdot f(k)$$

die *diskrete Fouriertransformation* von f zur Frequenz ω . Gelegentlich wird auch f^\wedge statt \hat{f} geschrieben.

Definition 21 Sei F ein endliches, frequenzdiskretes Spektrum der Länge n , dann heißt zu $t \in \mathbb{Z}_n$

$$\check{F}(t) := \sum_{k=0}^{n-1} e^{i2\pi tk/n} \cdot F(k)$$

die *inverse diskrete Fouriertransformation* von F zur Zeit t . Gelegentlich wird auch hier F^\vee statt \check{F} geschrieben.

Für $n \in \mathbb{N}$ lässt sich ein endliches zeitdiskretes Signal $f : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{R}$ immer rekonstruieren, denn es gilt

$$f(t) = f^{\wedge\vee}(t) \quad \forall t \in \mathbb{Z}_n,$$

die doppelte Fouriertransformation entspricht auch hier lediglich einer Umkehr der Zeit,

$$f^{\wedge\wedge}(\xi) = \frac{1}{n} \cdot f(-\xi \mod n), \quad (3.8)$$

und auch für diskrete Signale gibt es einen Zusammenhang von $\|f\|_2$ und $\|f^\wedge\|_2$, denn auch hier gilt die *Plancherel-Formel*

$$\sum_k |f(k)|^2 = \sum_\omega \left| \hat{f}(\omega) \right|^2.$$

⁵Natürlich könnte man auch allgemein Signale $f : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C}$ betrachten, aber im Rahmen dieser Arbeit ist die gegebene Definition ausreichend.

Definition 22 Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $f, g : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{R}$ endliche zeitdiskrete Signale, dann heißt

$$f \star g(t) := \sum_{k=0}^{n-1} f(t-k) \cdot g(k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \cdot g(t-k) \quad \text{mit } t \in \mathbb{Z}_n$$

die zyklische Faltung von f mit g .

Sie ist assoziativ, kommutativ und distributiv.

Definition 23 Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $f, g : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{R}$ endliche zeitdiskrete Signale, dann heißt

$$f * g(t) := \sum_{k=0}^{n-1} \overline{f(k)} \cdot g(t+k) \quad \text{mit } t \in \mathbb{Z}_n$$

die zyklische Korrelation von f mit g .

Bemerkung 7 Wie schon die kontinuierliche Faltung und Korrelation, so lassen sich auch die zyklische Faltung und Korrelation mit Hilfe der Fouriertransformation auswerten, was durch Einsatz der schnellen Fouriertransformation, für die besonders schnelle Algorithmen existieren,⁶ der Schlüssel zu deren effektiver Berechnung ist.

3.4.3 Die Hintransformation

Für eine sinnvolle Berechnung der Wavelettransformation sind nicht nur die Eigenschaften des Wavelets, sondern auch die des zu transformierenden Signals ausschlaggebend. Für diese spielt der folgende klassische Satz eine zentrale Rolle:

Satz 18 (Shannon, Whittaker) Wenn $\text{supp } \hat{f} \subset [-\pi/T, \pi/T]$, dann gilt

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \cdot \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}.$$

⁶Für die Details sei auf [FJ05] verwiesen.

3.4.3.1 Festlegung der oberen und unteren Skalengrenzen

Die Transformation

$$W_\psi f(s, t) := \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi\left(\frac{\tau - t}{s}\right)} f(\tau) d\tau$$

besteht im Wesentlichen aus einer Faltung, die für eine sinnvolle Menge von Skalen ausgewertet werden muss, was auf Basis der schnellen Fouriertransformation besonders effektiv möglich ist. Um die Berechnung möglichst effizient zu gestalten, sollten schon bei der Hintransformation sinnvolle obere und untere Skalengrenzen gewählt werden.

Dabei tritt das Problem auf, dass weder Wavelets noch Signale gleichzeitig kompakten Träger im Zeit- und Frequenzbereich haben können, man also immer in *mindestens* einem der beiden Bereiche mit einem „effektiven Träger“ arbeiten muss, außerhalb dessen das Wavelet oder sein Spektrum „klein genug“ werden.

Die untere Skalengrenze: Die minimale Skala, zu der die Berechnung der Wavelettransformation noch sinnvoll ist, definiert gleichzeitig die obere Grenzfrequenz der Transformation. Sie wird einerseits dadurch begrenzt, dass als Folge von Satz 18 ein korrekt abgetastetes Signal ohnehin keine Frequenzen enthält, die größer als $2\pi/T$ sind. Allerdings muss für die Verwendung der FFT auch das Wavelet korrekt abgetastet werden, und zwar mit dem selben Abtastintervall, was die *eigentliche* Beschränkung darstellt. Man legt daher die untere Skalengrenze wie folgt fest:

Definition 24 Sei f ein Signal, das mit einem Abtastintervall T abgetastet wurde, dann bezeichnet

$$s_{\min} := \min_{s \in \mathbb{R}^+} : \text{supp } \widehat{\psi_s} \subset [-\pi/T, \pi/T]$$

die untere Skalengrenze, für die die Berechnung der Wavelettransformierten noch sinnvoll ist, denn für alle $s < s_{\min}$ kommt es durch Unterabtastung des Wavelets im *Zeitbereich* zu Fehlern in der Berechnung.

Die obere Skalengrenze: Die maximale Skala, zu der die Berechnung der Wavelettransformation noch sinnvoll ist, definiert gleichzeitig die untere Grenzfrequenz der Transformation. Langsamere Frequenzen lassen sich dann nicht mehr sinnvoll erfassen und werden daher auch nicht betrachtet.

Überraschenderweise liefert die Verbindung von Formel 3.8 und Korollar 4 den entscheidenden Hinweis für die obere Grenzskaala, denn aus ihnen folgt,

dass für ein Waveletspektrum $\hat{\psi} \in \mathcal{L}_2(\mathbb{C})$ mit $\text{supp } \hat{\psi} \subset [-\pi, \pi]$, das mit einem Abtastintervall Ω abgetastet wird, die *inverse* Fouriertransformation von $\hat{\psi}$ periodisch mit Periode $2\pi/\Omega$ ist. Diese Periode darf jedoch nicht größer sein als der durch die Datenerfassung oder -auswahl vorgegebene Träger des Signals und wird durch den Waveletparameter s bestimmt.

Definition 25 Sei f ein Signal mit $\text{supp } f \subset [-\tilde{T}, \tilde{T}]$, dann bezeichnet

$$s_{\max} := \max_{s \in \mathbb{R}} : \text{supp } \psi_{s,0} \subset [-\tilde{T}, \tilde{T}]$$

die obere Skalengrenze, für die die Berechnung der Wavelettransformierten noch sinnvoll ist, denn für alle $s > s_{\max}$ wird der Träger des Wavelets zu breit.

Mit anderen Worten: Im Kontext der FFT, wo sowohl Signale als auch Spektra *periodisch* und durch die Abtastung auch nur auf einer *endlichen Punktmenge* definiert sind, bedeutet ein zu großes s_{\max} , dass der Träger des Wavelets an den äußeren Abtastpunkten abgeschnitten wird und die Energie, die sich im abgeschnittenen Teil des Trägers befindet, ist verloren. Dies führt zunächst dazu, dass für $s > s_{\max}$ die Bedingung $\|\psi_{s_{\max},0}\|_2 = 1$ verletzt wird und in der Folge auch zu falschen Waveletkoeffizienten $W_\psi f(s, t)$.

Praktische Aspekte: Natürlich ist nicht sichergestellt, dass für ein beliebiges Wavelet eine geschlossene Darstellung im Zeit- und Frequenzbereich existiert. Man wird also nicht umhin können, in einer erheblichen Anzahl von Fällen wenigstens eine der beiden Grenzen numerisch zu bestimmen. Darüber hinaus kann ein Wavelet auch nicht gleichzeitig kompakten Träger im Zeit- und Frequenzbereich haben, so dass, falls der Träger von ψ im Zeitbereich nicht kompakt ist, mit der zyklischen Korrelation nicht die tatsächlichen Werte von $W_\psi f(s, t)$ berechnet werden, sondern nur Annäherungen der Form

$$\begin{aligned} & \int_{[-\pi T, \pi T]} \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi\left(\frac{\tau-t}{s}\right)} f(\tau) d\tau \\ &= W_\psi f(s, t) - \underbrace{\int_{\mathbb{R} \setminus [-\pi T, \pi T]} \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi\left(\frac{\tau-t}{s}\right)} f(\tau) d\tau}_{=: \eta}. \end{aligned}$$

Dies ist aber insofern kein Problem, als sich durch explizite *Periodisierung* von f^7 bereits *vor* der diskreten Fouriertransformation der Wert von η unter

⁷Das mehrfache „Hintereinanderhängen“ von f , durch das in der Fouriertransformierten zusätzliche Nullen zwischen den vorhandenen Frequenzen, insbesondere auch zwischen der ursprünglich tiefsten und der Frequenz 0 eingefügt werden.

jede beliebige Grenze drücken lässt. Das Verfahren und seine Auswirkungen werden in Abbildung 3.4 gezeigt.

Das gleiche Problem existiert im Frequenzbereich, wenn ψ dort keinen kompakten Träger hat, was wiederum durch explizites *Upsampling* des Signals behoben werden kann. Dieses lässt sich einfach dadurch bewerkstelligen, dass die *diskrete* Fouriertransformation des Signals um zusätzliche hohe Frequenzen mit Amplitude 0 ergänzt und dann rücktransformiert wird. Das Verfahren und seine Auswirkungen werden in Abbildung 3.5 gezeigt.

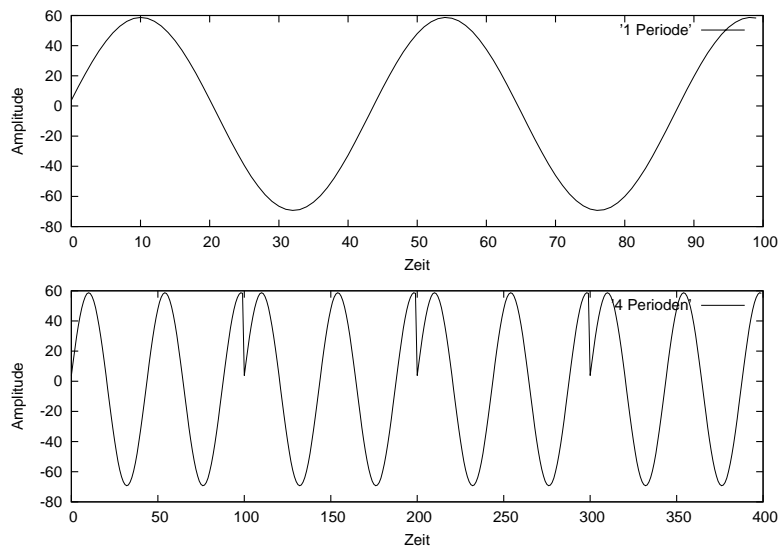
Beide Lösungen erhöhen die Rechenzeit mit dem jeweiligen Upsampling- bzw. Periodisierungsfaktor, so dass sich schnell große Geschwindigkeitseinbußen einstellen können.

3.4.4 Die Rücktransformation

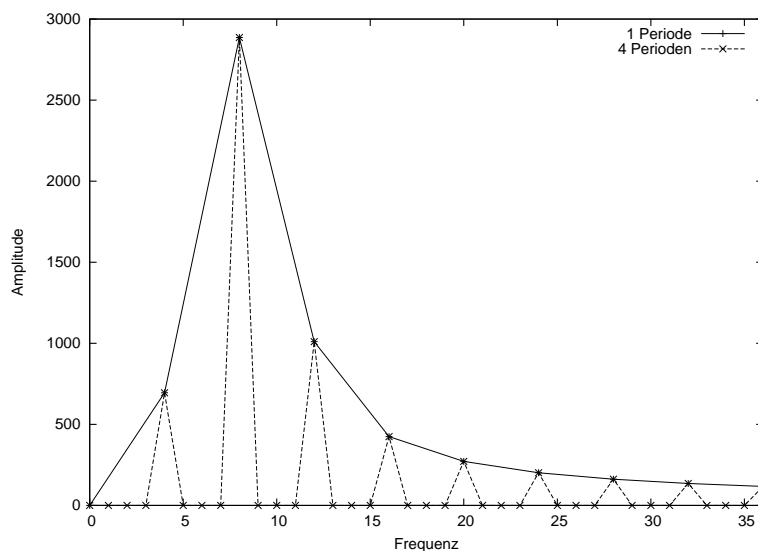
Welche Skalen sollen berechnet werden? Für eine effiziente Rücktransformation muss zunächst festgelegt werden, wie die zu berechnenden Skalen *verteilt* werden sollen. Hier entsteht ein Interessenkonflikt zwischen der Möglichkeit der schnellen Rücktransformation und der für praktische Anwendungen beliebten Einteilung des Frequenzraumes in gleich breite Frequenzbänder. Letztere würden einen direkten Vergleich zwischen den Ergebnissen der Wavelettransformation und solchen, die mit klassischen Fouriermethoden gewonnen wurden, ermöglichen. Andererseits folgt aus Bemerkung 2, dass für hohe Frequenzen – kleinen Skalen entsprechend – die Darstellung wegen der zunehmenden Streckung der Heisenbergboxen in Frequenzrichtung immer redundanter wird, so dass sich im Interesse einer *schnellen* Rücktransformation eine *temperierte* Einteilung anbietet, die sich am Konzept der Oktave orientiert, wie es auch im Bereich der diskreten Wavelettransformationen Anwendung findet. Dabei ist nicht mehr die Differenz, sondern *der Quotient benachbarter Skalen konstant*, und dieser entspricht einer ganzzahligen Wurzel von 2, so dass pro Oktave jeweils die selbe Anzahl an Skalen verwendet wird.

3.4.4.1 Approximationsfehler der Rücktransformation

Für die Hin- und Rücktransformation kann man davon ausgehen, dass sowohl das Signal als auch das Wavelet im Zeitbereich dicht genug abgetastet wurden, jedoch ergibt sich zwangsläufig ein Fehler durch die Beschränkung des Skalenbereichs und die Berechnung der Transformation für nur eine beschränkte Menge von Skalenwerten. Die Fehler durch Beschränkung des Skalenbereichs wurden weiter oben schon untersucht, daher soll nun noch der Quadraturfehler Gegenstand näherer Betrachtung werden. Seien dazu wie

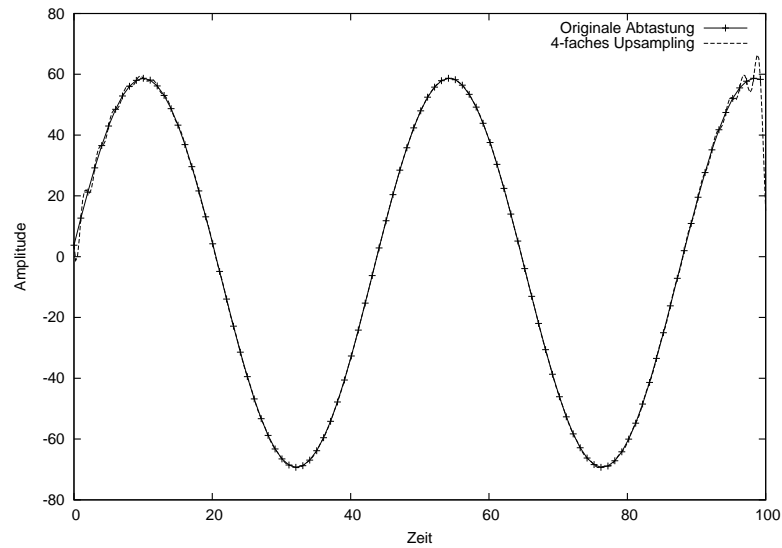


(a) Oben das ursprüngliche Testsignal, unten das Testsignal vierfach periodisiert.

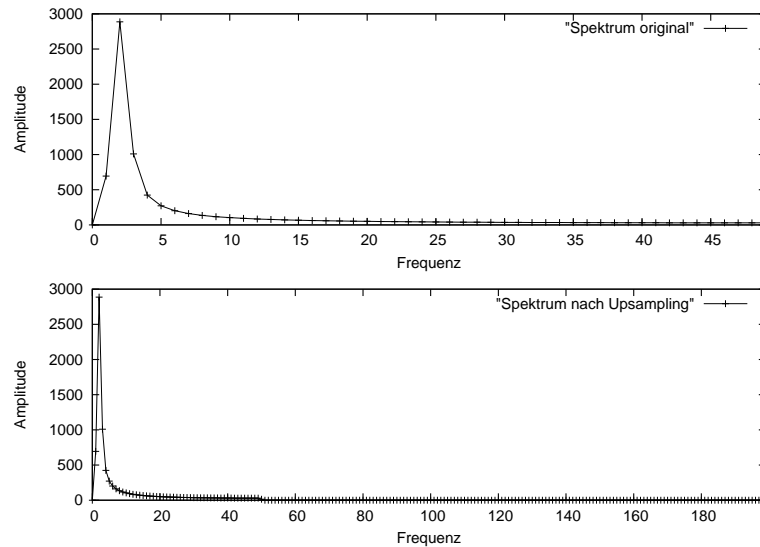


(b) Ausschnitt aus den FFT-Spektra der beiden Signale: Durch die Periodisierung werden zusätzliche Frequenzen erzeugt, deren Amplitude 0 ist. Wichtig ist dabei, dass die zusätzlich erzeugten Frequenzen auch die *tiefsten* Frequenzen beinhalten und damit außer dem Mittelwert (Frequenz 0) nun auch die drei nächsten Frequenzen Amplitude 0 haben.

Abbildung 3.4: Auswirkung der Periodisierung eines Signals auf das mit der FFT gewonnene Spektrum. Bei der Periodisierung ändert sich *nur* die Länge des Signals, *nicht* aber die Abtastfrequenz.



(a) Testsignal im Original und nach 4-fachem Upsampling. Mit der Abtastfrequenz vervierfacht sich auch die Zahl der Datenpunkte, allerdings werden die ursprünglichen Abtastwerte immer noch interpoliert.



(b) FFT-Spektren des originalen und des durch Upsampling erzeugten Signals: Nach dem Upsampling bleiben die Originalfrequenzen erhalten, aber es werden dreimal so viele hohe Frequenzen der Amplitude 0 hinzugefügt.

Abbildung 3.5: Auswirkung des Upsamplings eines Signals auf das mit der FFT gewonnene Spektrum. Beim Upsampling ändern sich die Abtastfrequenz und die Zahl der Abtastpunkte, *nicht* aber die zeitliche Dauer des Signals.

oben S_\perp und S_\top gegeben. Für analytische und reelle Wavelets gilt nach den Sätzen 3 und 5 die folgende Rekonstruktionsformel, die in der Praxis mit den angegebenen Fehlern behaftet ist:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2}{c_\psi} \Re \left(\int_0^\infty \int W_\psi f(s, u) \psi_s(t - u) du \frac{ds}{s^2} \right) \\ &= \frac{2}{c_\psi} \Re \left(\int_0^{S_\perp} \int \dots du \frac{ds}{s^2} \right) \quad (\text{Abschneidefehler}) \\ &+ \frac{2}{c_\psi} \Re \left(\int_{S_\perp}^{S_\top} \int \dots du \frac{ds}{s^2} \right) \quad (\text{Quadraturfehler}) \\ &+ \frac{2}{c_\psi} \Re \left(\int_{S_\top}^\infty \int \dots du \frac{ds}{s^2} \right) \quad (\text{Abschneidefehler}). \end{aligned}$$

3.4.4.2 Der Einfluss der verwendeten Quadraturformel

Bei der Abschätzung von Quadraturfehlern spielen die Ableitungen des Integranden eine große Rolle. So gilt nach [DR67, Formel 4.5.3] für den Fehler interpolatorischer Quadraturformeln, die Polynome bis zum Grad $n-1$ exakt integrieren, Integranden $f(s) \in C^n[S_\perp, S_\top]$ und $S_\perp = s_1 < s_2 < \dots < s_n = S_\top$ zum Beispiel

$$E(f) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \int_{S_\perp}^{S_\top} \prod_{k=1}^n (s - s_k) ds,$$

mit $\xi \in [S_\perp, S_\top]$, also gilt für dessen Betrag

$$|E(f)| \leq \frac{\max_{\xi \in [S_\perp, S_\top]} |f^{(n)}(\xi)|}{n!} \left| \int_{S_\perp}^{S_\top} \prod_{k=1}^n (s - s_k) ds \right|. \quad (3.9)$$

Um für eine gegebene Quadraturformel den Quadraturfehler in Skalenrichtung bestimmen zu können, wird es also nötig, die Ableitungen der Wavelettransformierten in Skalenrichtung zu bestimmen, was in den folgenden beiden Abschnitten erfolgt. Die Untersuchung wird einige interessante Zusammenhänge zwischen den Momentenfunktionen der Ableitungen des Wavelets und der Ableitung der Wavelettransformierten zu Tage bringen, allerdings wird man in der Praxis meist nicht umhin können, das Maximum der Ableitung numerisch zu bestimmen, falls eine Abschätzung des Quadraturfehlers gewünscht ist.

Da im Kontext reeller und analytischer Wavelets ohnehin nur positive Skalen Verwendung finden, werden im Folgenden die Sätze 19 und 20 nur für $s \geq 0$ bewiesen, um eine umständliche Behandlung von $|s|^{-1/2}$ zu umgehen.

3.4.4.3 Der Quadraturfehler im Zeitbereich

Da für die numerische Umsetzung der Waveletsynthese Geschwindigkeit der zentrale Punkt ist, soll für die Rekonstruktion im Zeitbereich hier nur auf die schnelle Synthese nach Bemerkung 6 eingegangen werden, da die traditionelle Rekonstruktion nach den Sätzen 3 und 5 noch langsamer ist als die unten vorgestellte Rekonstruktion im Frequenzbereich, was sie nahezu unbrauchbar ist.

Um den Quadraturfehler abschätzen zu können wird es nötig, Ableitungen

$$\frac{\partial^n}{\partial s^n} W_\psi f(s, u)$$

der Wavelettransformierten in Skalenrichtung zu betrachten, und zwar zunächst ohne die Normierungsgröße $1/\sqrt{s}$. Sei dazu

$$V_\psi f(s, t) := \int_{\mathbb{R}} f(\tau) \cdot \overline{\psi\left(\frac{\tau-t}{s}\right)} d\tau.$$

Für die ersten beiden Ableitungen gilt dann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} V_\psi f(s, t) &= \frac{\partial}{\partial s} \int_{\mathbb{R}} f(\tau) \cdot \overline{\psi\left(\frac{\tau-t}{s}\right)} d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) \cdot \frac{\partial}{\partial s} \overline{\psi\left(\frac{\tau-t}{s}\right)} d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) \cdot \overline{\left(-s^{-2}(\tau-t) \psi'\left(\frac{\tau-t}{s}\right)\right)} d\tau \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s^2} V_\psi f(s, t) &= \frac{\partial}{\partial s} \int_{\mathbb{R}} f(\tau) \cdot \overline{\left(-s^{-2}(\tau-t) \psi'\left(\frac{\tau-t}{s}\right)\right)} d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) \cdot \frac{\partial}{\partial s} \overline{\left(-s^{-2}(\tau-t) \psi'\left(\frac{\tau-t}{s}\right)\right)} d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) \cdot \overline{\left(2s^{-3}(\tau-t) \psi'\left(\frac{\tau-t}{s}\right) + s^{-4}(\tau-t)^2 \psi''\left(\frac{\tau-t}{s}\right)\right)} d\tau, \end{aligned}$$

Es ergeben sich also Korrelationen des Signals mit den Momentenfunktionen der Ableitungen des Wavelets und die Ausdrücke werden schnell recht kompliziert. Insbesondere ergibt sich eine besondere Struktur der Vorfaktoren, die sich aus den so genannten Lah-Zahlen ergeben.

Definition 26 Für $m, n \in \mathbb{N}$ sei die *Lah-Zahl* $\bar{l}(m, n)$ definiert durch

$$\bar{l}(n, m) := (n - 1 + m) \bar{l}(n - 1, m) + \bar{l}(n - 1, m - 1)$$

mit $\bar{l}(0, 0) = 1, \bar{l}(n, 0) = 0$ und $\bar{l}(n, m) = 0 \forall n < m \vee n < 0 \vee m < 0$.

Lemma 5 [Del04] Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ hat die Zahl $\bar{l}(n, m)$ die geschlossene Darstellung

$$\bar{l}(n, m) = \frac{n!}{m!} \binom{n-1}{m-1}.$$

Allgemein ergibt sich für die n -te Ableitung das folgende Ergebnis:

Lemma 6 Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\frac{\partial^n}{\partial s^n} \left(\psi \left(\frac{\tau - t}{s} \right) \right) = (-1)^n \sum_{m=0}^n \bar{l}(n, m) \cdot \frac{(\tau - t)^m \psi^{(m)} \left(\frac{\tau - t}{s} \right)}{s^{m+n}}.$$

BEWEIS Vollständige Induktion nach n :

Sei $n = 0$, dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^0}{\partial s^0} \psi \left(\frac{\tau - t}{s} \right) &= (-1)^0 \sum_{m=0}^0 \bar{l}(n, m) \cdot s^{-(m)} (\tau - t)^m \psi^{(m)} \left(\frac{\tau - t}{s} \right) \\ &= \bar{l}(0, 0) \cdot \psi^{(0)} \left(\frac{\tau - t}{s} \right) \\ &= \psi \left(\frac{\tau - t}{s} \right) \end{aligned}$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig und die Formel für $n - 1$ schon gezeigt, dann gilt

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}} \psi \left(\frac{\tau - t}{s} \right) \right) \\ &= (-1)^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} \bar{l}(n-1, m) \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{(\tau - t)^m \psi^{(m)} \left(\frac{\tau - t}{s} \right)}{s^{m+n-1}} \right) \\ &= (-1)^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} \bar{l}(n-1, m) \cdot \\ &\quad \left(-(m+n-1) s^{-(m+n)} (\tau - t)^m \psi^{(m)} \left(\frac{\tau - t}{s} \right) + \right. \\ &\quad \left. s^{-(m+n-1)} \cdot -s^{-2} (\tau - t)^{m+1} \psi^{(m+1)} \left(\frac{\tau - t}{s} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^n \sum_{m=0}^{n-1} \bar{l}(n-1, m) \cdot \\
&\quad \left((m+n-1) s^{-(m+n)} (\tau-t)^m \psi^{(m)} \left(\frac{\tau-t}{s} \right) + \right. \\
&\quad \left. s^{-(m+n+1)} \cdot (\tau-t)^{m+1} \psi^{(m+1)} \left(\frac{\tau-t}{s} \right) \right).
\end{aligned}$$

In dieser Summe lassen sich nun die Terme zur Ableitung $\psi^{(m)}$ in Abhängigkeit von m wie folgt zusammenfassen:

1. $m = n-1$: In der Summe kommt dafür nur der Term

$$\bar{l}(n-1, n-1) \cdot \frac{(\tau-t)^{m+1} \psi^{(m+1)} \left(\frac{\tau-t}{s} \right)}{s^{m+n+1}} = \frac{(\tau-t)^n \psi^{(n)} \left(\frac{\tau-t}{s} \right)}{s^{2n}}$$

vor, was dem entsprechenden Term aus der Behauptung entspricht, denn es ist $\bar{l}(n-1, n-1) = 1$, insbesondere enthält dies auch den Fall $m=0, n=1$.

2. $0 \leq m < n-1$: Hier ist die Situation etwas komplizierter, denn für die Ableitung $\psi^{(m)}$ finden sich nun in der Summe zwei Terme:

$$\begin{aligned}
&\bar{l}(n-1, m) \cdot (m+n-1) s^{-(m+n)} (\tau-t)^m \psi^{(m)} \left(\frac{\tau-t}{s} \right) + \\
&\bar{l}(n-1, m-1) \cdot s^{-(m+n)} \cdot (\tau-t)^m \psi^{(m)} \left(\frac{\tau-t}{s} \right) \\
&= \\
&\quad \frac{(\tau-t)^m \psi^{(m)} \left(\frac{\tau-t}{s} \right)}{s^{m+n}} \bar{l}(n, m).
\end{aligned}$$

Auch dies entspricht der Behauptung und somit ist alles gezeigt. ■

Definition 27 Zu $n \in \mathbb{N}$ sei die Doppelfakultät definiert durch

$$n!! = \begin{cases} n \cdot (n-2) \dots 2 & \text{für } n \text{ gerade} \\ n \cdot (n-2) \dots 1 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Satz 19 Sei $n \in \mathbb{N}$, dann ist für $s \geq 0$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^n}{\partial s^n} \psi_s(\tau-t) = \\
&(-1)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{m=0}^k \bar{l}(k, m) \cdot \frac{(2(n-k)-1)!!}{2^{n-k} \cdot s^{2n+m-k+1/2}} \cdot (\tau-t)^m \psi^{(m)} \left(\frac{\tau-t}{s} \right).
\end{aligned}$$

BEWEIS Nach Definition ist $\psi_s(\tau - t) = \psi\left(\frac{\tau - t}{s}\right) \cdot s^{-1/2}$ und durch Anwenden der Leibniz-Regel ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^n}{\partial s^n} \psi\left(\frac{\tau - t}{s}\right) \cdot s^{-1/2} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\partial^k}{\partial s^k} \psi\left(\frac{\tau - t}{s}\right) \cdot \frac{\partial^{n-k}}{\partial s^{n-k}} s^{-1/2} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\partial^k}{\partial s^k} \left(\psi\left(\frac{\tau - t}{s}\right) \right) \cdot \prod_{l=0}^{n-k-1} -\frac{2l+1}{2} \cdot s^{-\frac{2(n-k)+1}{2}} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\partial^k}{\partial s^k} \left(\psi\left(\frac{\tau - t}{s}\right) \right) \cdot \frac{\prod_{l=0}^{n-k-1} (2l+1)}{(-2)^{n-k}} \cdot s^{-\frac{2(n-k)+1}{2}}.
\end{aligned}$$

Einsetzen nach Lemma 6 und Definition 27 liefert dann weiter

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\partial^k}{\partial s^k} \left(\psi\left(\frac{\tau - t}{s}\right) \right) \cdot \frac{\prod_{l=0}^{n-k-1} (2l+1)}{(-2)^{n-k}} \cdot s^{-\frac{2(n-k)+1}{2}} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \sum_{m=0}^k \bar{l}(k, m) \cdot \frac{(\tau - t)^m \psi^{(m)}\left(\frac{\tau - t}{s}\right)}{s^{m+n}} \\
&\quad \cdot \frac{\prod_{l=0}^{n-k-1} (2l+1)}{(-2)^{n-k}} \cdot s^{-\frac{2(n-k)+1}{2}}. \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{m=0}^k \bar{l}(k, m) \cdot (\tau - t)^m \psi^{(m)}\left(\frac{\tau - t}{s}\right) \\
&\quad \cdot \frac{(-1)^k}{(-1)^{n-k}} \frac{\prod_{l=0}^{n-k-1} (2l+1)}{2^{n-k}} \cdot s^{-\left(\frac{2(n-k)+1}{2} + m + n\right)} \\
&= (-1)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{m=0}^k \bar{l}(k, m) \cdot \frac{(2(n-k)-1)!!}{2^{n-k} \cdot s^{2n+m-k+1/2}} \\
&\quad \cdot (\tau - t)^m \psi^{(m)}\left(\frac{\tau - t}{s}\right). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Dies erlaubt es endlich, die gewünschte Ableitung der Wavelettransformierten zu berechnen:

Korollar 5 Sei ψ ein Wavelet, f ein \mathcal{L}_2 -Signal, $n \in \mathbb{N}_0$ und $s \geq 0$. Wenn

$\frac{\partial^n}{\partial s^n} W_\psi f(s, \cdot)$ existiert, so hat es die Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{\partial s^n} W_\psi f(s, t) = & \frac{(-1)^n \int_{\mathbb{R}} f(\tau) \cdot}{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{m=0}^k \bar{l}(k, m) \cdot \frac{(2(n-k)-1)!!}{2^{n-k} \cdot s^{2n+m-k+1/2}} \cdot (\tau-t)^m \psi^{(m)}\left(\frac{\tau-t}{s}\right) d\tau}. \end{aligned}$$

BEWEIS Einsetzen nach dem vorangehenden Satz liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{\partial s^n} W_\psi f(s, t) &= \frac{\partial^n}{\partial s^n} \int_{\mathbb{R}} f(\tau) \overline{\psi\left(\frac{\tau-t}{s}\right)} s^{-1/2} d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) \frac{\partial^n}{\partial s^n} \left(\overline{\psi\left(\frac{\tau-t}{s}\right)} s^{-1/2} \right) d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) \cdot (-1)^n \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{m=0}^k \bar{l}(k, m) \cdot \frac{(2(n-k)-1)!!}{2^{n-k} \cdot s^{2n+m-k+1/2}} \cdot (\tau-t)^m \psi^{(m)}\left(\frac{\tau-t}{s}\right) d\tau}{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{m=0}^k \bar{l}(k, m) \cdot \frac{(2(n-k)-1)!!}{2^{n-k} \cdot s^{2n+m-k+1/2}} \cdot (\tau-t)^m \psi^{(m)}\left(\frac{\tau-t}{s}\right) d\tau}. \blacksquare \end{aligned}$$

Generell können Wavelettransformierte im Bereich kleiner Skalen beliebig rauh werden:

Lemma 7 Sei $\psi \in \mathcal{L}_\infty$ ein Wavelet. Ist $W_\psi \psi(s, t)$ stetig in s , dann existiert für alle $r > 0$ ein $S > 0$, für das $\frac{\partial}{\partial s} W_\psi \psi(S, t) = r/2$.

BEWEIS Seien $r, \tilde{s} > 0$ und $f := r \cdot \psi_{\tilde{s}}$. In jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ ist $f(t)$ zumindest lipschitzstetig vom Grad 0. Daher liefert Satz 8, dass $\lim_{s \rightarrow 0} W_\psi f(s, t) = 0$. Außerdem gilt $W_\psi f(\tilde{s}, 0) = r \|\psi\|_2^2 = r$ und da nach Voraussetzung $W_\psi \psi(s, t)$ stetig in s ist, existiert nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $S \in (0, \tilde{s}]$, so dass $|\frac{\partial}{\partial s} W_\psi f(S, 0)| = r/2$. \blacksquare

Es bleibt nun die Frage, für welche Wavelets sich mit den gewonnenen Abschätzungen punktweise Aussagen über die Qualität der Approximation treffen lassen. Das entscheidende Kriterium dafür ist die punktweise Existenz der Faltungen mit den Momentenfunktionen. Für einige wichtige Klassen von Wavelets lässt sich diese Existenz sofort belegen.

Lemma 8 Sei $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ beschränkt und sei $\psi \in C^n$ ein Wavelet mit kompaktem Träger, dann existiert $W_\psi^{(k)} f(\cdot, t) \forall k \in \{0, \dots, n\}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

BEWEIS Da ψ selbst kompakten Träger hat, haben auch alle seine Ableitungen kompakten Träger und darüber hinaus sind wegen ihrer Stetigkeit die $\psi^{(n)}$ beschränkt für alle $0 \leq k \leq n$. Es folgt, dass für beliebiges $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(\tau) (\tau - t)^k \overline{\psi^{(k)}\left(\frac{\tau - t}{s}\right)} d\tau &= \int_{\text{supp } \psi_{s,t}^{(k)}} f(\tau) (\tau - t)^k \overline{\psi^{(k)}\left(\frac{\tau - t}{s}\right)} d\tau \\ &\leq \max_{\xi \in \text{supp } \psi_{s,t}^{(k)}} \left| f(\xi) \overline{\psi_{s,t}^{(k)}(\xi)} \right| \\ &\quad \cdot \int_{\text{supp } \psi_{s,t}^{(k)}} |(\tau - t)^k| d\tau \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Also existieren alle Summanden in Lemma 6 und damit nach Satz 19 auch $W_{\psi}^{(k)} f(\cdot, t) \forall k \in \{0, \dots, n\}$. \blacksquare

Man könnte nun eine erste Abschätzung für den Quadraturfehler in Skalenrichtung angeben, indem man die Ableitung der Wavelettransformierten aus Korollar 5 in Gleichung 3.9 einsetzt; allerdings scheint das Auffinden des Maximums eines solch komplizierten Ausdrucks kaum praktikabel.

Für schnell fallende Wavelets und beschränkte Signale sieht es allerdings deutlich besser aus, denn es gilt der folgende Satz:

Lemma 9 Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ beschränkt und sei ψ schnell fallend vom Grad n , dann existiert $W_{\psi}^{(k)} f(\cdot, t) \forall k \in \{0, \dots, n\}$.

BEWEIS Im Vergleich zum vorigen Lemma lässt sich hier eine deutlich bessere Abschätzung angeben:

Sei $k \in \{0, \dots, n\}$ und $M := \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$, dann gilt nach Definition 15 mit einer geeigneten Abfallkonstante $D_k \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} f(\tau) (\tau - t)^k \overline{\psi^{(k)}\left(\frac{\tau - t}{s}\right)} d\tau \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}} f(\tau) (\tau - t)^k \overline{\psi^{(k)}\left(\frac{\tau - t}{s}\right)} d\tau \right| \\ &\leq M \int_{\mathbb{R}} \left| (\tau - t)^k \overline{\psi^{(k)}\left(\frac{\tau - t}{s}\right)} \right| d\tau \\ &\leq M \int_{\mathbb{R}} \left| (\tau - t)^k \frac{D_k}{(1 + |\tau - t|^{k+m})} \right| d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq M \cdot D_k \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tau|^k}{(1 + |\tau|^{k+m})} d\tau \\
&\leq M \cdot D_k \int_{\mathbb{R} \setminus [-1,1]} \frac{|\tau|^k}{(1 + |\tau|^{k+m})} d\tau \\
&\quad + M \cdot D_k \int_{[-1,1]} 1 d\tau \\
&\leq M \cdot D_k \left(2 + \int_{\mathbb{R} \setminus [-1,1]} \frac{1}{|\tau|^m} d\tau \right) \\
&= 2M \cdot D_k \cdot \left(\frac{m}{m-1} \right). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Damit folgt nun endlich eine Abschätzung für den Term, der in Gleichung 3.9 den wesentlichen Beitrag liefert. Hierbei ist jedoch zu bedenken, dass es nicht besser sein muss, m groß zu wählen, da die D_k wieder von m abhängen.

Korollar 6 *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ beschränkt und sei ψ schnell fallend vom Grad n , dann gilt mit M und D_k wie im vorigen Lemma, dass sich der Term $\max_{x \in [S_{\perp}, S_{\top}]} |f^{(n)}(s)|$ in Gleichung 3.9 folgendermaßen abschätzen lässt:*

$$\begin{aligned}
&\max_{s \in [S_{\perp}, S_{\top}]} \left| \frac{\partial^n}{\partial s^n} W_{\psi} f(s, t) \right| \\
&\leq 2M \frac{m}{m-1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{j=0}^k \bar{l}(k, j) \cdot \frac{(2(n-k)-1)!!}{2^{n-k} \cdot (S_{\top})^{2n+j-k+1/2}} D_k.
\end{aligned}$$

BEWEIS Einsetzen der Abschätzung aus dem vorhergehenden Lemma in Korollar 5 liefert

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_{S_{\perp}, m, n} &:= \max_{s \in [S_{\perp}, S_{\top}]} \left| \frac{\partial^n}{\partial s^n} W_{\psi} f(s, t) \right| \\
&\leq \max_{s \in [S_{\perp}, S_{\top}]} 2M \frac{m}{m-1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{m=0}^k \bar{l}(k, m) \cdot \frac{(2(n-k)-1)!!}{2^{n-k} \cdot s^{2n+m-k+1/2}} D_k \\
&= 2M \frac{m}{m-1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{j=0}^k \bar{l}(k, j) \cdot \frac{(2(n-k)-1)!!}{2^{n-k} \cdot (S_{\perp})^{2n+j-k+1/2}} D_k. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Man kann nun $\tilde{M}_{S_{\perp}, m, n}$ in Gleichung 3.9 einsetzen und erhält bei einer interpolatorischen Quadraturformel, die Polynome bis zum Grad $n-1$ exakt

integriert, einen Quadraturfehler, dessen Schätzung außer von den Stützstellen sogar nur von der jeweils kleinsten Skala abhängt:

$$|E(f)| \leq \frac{\tilde{M}_{S_\perp, m, n}}{n!} \left| \int_{S_\perp}^{S_\top} \prod_{k=1}^n (s - s_k) ds \right|.$$

3.4.4.4 Der Quadraturfehler im Frequenzbereich

Da für die numerische Auswertung nur die Quadratur über endliche viele, also abzählbar viele Skalen in Frage kommt, bietet es sich natürlich an, den Term $\int_{S_\perp}^{S_\top} \int W_\psi f(s, u) \psi_s(t - u) du \frac{ds}{s^2}$ nicht im Zeitbereich, sondern im Frequenzbereich zu behandeln, was überdies noch Zeit spart, da die Faltung mit ψ_s ohnehin im Frequenzbereich durchgeführt wird, und man sich durch vorweggenommene Quadratur im Frequenzbereich alle bis auf eine inverse Fouriertransformation spart.

Satz 20 Sei ψ ein Wavelet, f ein \mathcal{L}_2 -Signal, $n \in \mathbb{N}_0$ und $s \geq 0$. Wenn $\frac{\partial^n}{\partial s^n} \hat{W}_\psi f(s, \cdot)$ existiert, so hat es die Form

$$\frac{\partial^n}{\partial s^n} \hat{W}_\psi f(s, \cdot)(\omega) = \hat{f} \cdot \sum_{k=0}^n c_{n,k} \cdot \omega^k \hat{\psi}^{(k)}(s\omega) \cdot s^{-\frac{2(n-1-k)+1}{2}}$$

$$\text{mit } \begin{cases} c_{0,0} &= 1 \\ c_{n,0} &= -\frac{2(n-2)+1}{2} c_{n-1,0} \\ c_{n,\{1,\dots,n-1\}} &= c_{n-1,k-1} - \frac{2(n-2-k)+1}{2} c_{n-1,k} \\ c_{n,n} &= c_{n-1,n-1} \end{cases}.$$

BEWEIS Zunächst gilt nach den Rechenregeln für die Fouriertransformation und Formel 3.1, dass $\hat{W}_\psi f(s, \cdot) = \hat{f} \cdot \hat{\psi}_s = \hat{f}(\omega) \cdot |s|^{1/2} \hat{\psi}(s\omega)$.

Sei $n = 0$:

Dann ist $\frac{\partial^n}{\partial s^n} \hat{W}_\psi f(s, \cdot) = \hat{f} \cdot \hat{\psi}_s$ und hat damit die behauptete Form; insbesondere ist $c_{0,0} = 1$.

Sei nun $n > 0$ und die Behauptung für $n - 1$ schon bewiesen:

In der Summe tritt dann für jedes k ein Faktor der Form $\hat{\psi}^{(k)}(s\omega) \cdot s^{-\frac{2(n-2-k)+1}{2}}$ auf. Für diese Faktoren gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(\hat{\psi}^{(k)}(s\omega) \cdot s^{-\frac{2(n-2-k)+1}{2}} \right) &= \omega \hat{\psi}^{(k+1)}(s\omega) s^{-\frac{2(n-2-k)+1}{2}} \\ &\quad + \hat{\psi}^{(k)}(s\omega) \cdot -\frac{2(n-2-k)+1}{2} s^{-\frac{2(n-1-k)+1}{2}} \end{aligned}$$

und es folgt

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial s} \left(\hat{f} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} c_{n-1,k} \cdot \omega^k \hat{\psi}^{(k)}(s\omega) \cdot s^{-\frac{2(n-2-k)+1}{2}} \right) \\
&= \hat{f} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} c_{n-1,k} \cdot \omega^k \left(\omega \hat{\psi}^{(k+1)}(s\omega) s^{-\frac{2(n-2-k)+1}{2}} \right. \\
&\quad \left. + \hat{\psi}^{(k)}(s\omega) \cdot -\frac{2(n-2-k)+1}{2} s^{-\frac{2(n-1-k)+1}{2}} \right) \\
&= \hat{f} \cdot \left(\sum_{k=1}^n c_{n-1,k-1} \cdot \omega^k \hat{\psi}^{(k)}(s\omega) s^{-\frac{2(n-1-k)+1}{2}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^{n-1} c_{n-1,k} \cdot \omega^k \hat{\psi}^{(k)}(s\omega) \cdot -\frac{2(n-2-k)+1}{2} s^{-\frac{2(n-1-k)+1}{2}} \right) \\
&= \hat{f} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n-1} \omega^k \hat{\psi}^{(k)}(s\omega) s^{-\frac{2(n-1-k)+1}{2}} \cdot \left(c_{n-1,k-1} - \frac{2(n-2-k)+1}{2} c_{n-1,k} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2(n-2)+1}{2} c_{n-1,0} s^{-\frac{2(n-1)+1}{2}} \hat{\psi}(s\omega) \right. \\
&\quad \left. + c_{n-1,n-1} \omega^n \hat{\psi}^{(n)}(s\omega) \cdot s^{\frac{1}{2}} \right) \\
&= \hat{f} \cdot \sum_{k=0}^n c_{n,k} \cdot \omega^k \hat{\psi}^{(k)}(s\omega) \cdot s^{-\frac{2(n-1-k)+1}{2}} \\
&\text{mit } \begin{cases} c_{n,0} &= -\frac{2(n-2)+1}{2} c_{n-1,0} \\ c_{n,\{1,\dots,n-1\}} &= c_{n-1,k-1} - \frac{2(n-2-k)+1}{2} c_{n-1,k} \\ c_{n,n} &= c_{n-1,n-1} \end{cases}
\end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. ■

Das Ergebnis aus Satz 20 eingesetzt in Gleichung 3.9 ergibt schließlich

$$\begin{aligned}
& |E(f)| \\
&\leq \frac{1}{n!} \max_{s \in [S_\perp, S_\top]} \left| \hat{f}(\omega) \cdot \sum_{k=0}^n c_{n,k} \cdot \omega^k \hat{\psi}^{(k)}(s\omega) \cdot s^{-\frac{2(n-1-k)+1}{2}} \right| \\
&\quad \cdot \left| \int_{S_\perp}^{S_\top} \prod_{k=1}^n (s - s_k) ds \right|,
\end{aligned}$$

wobei es schwierig sein dürfte, hier im Einzelfall den maximalen Betrag des Teilausdrucks $\hat{\psi}^{(k)}(s\omega) \cdot s^{-\frac{2(n-1-k)+1}{2}}$ zu bestimmen.

Auch für die $c_{n,k}$ gibt es keine einfache geschlossene Form, aber immerhin kann man das folgende Ergebnis festhalten:

Korollar 7 Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

1. $c_{n,n} = 1 \forall n$, sowie
2. $c_{n,0} = (2n-1)!! / (-2)^n$.

BEWEIS 1. Die Behauptung folgt sofort aus $c_{0,0} = 1$ und $c_{n,n} = c_{n-1,n-1}$.

2. Zunächst gilt $c_{1,0} = 0!! / (-2)^0$.

Sei nun $n > 1$ und die Behauptung für $n-1$ schon gezeigt, dann gilt

$$\begin{aligned}
 c_{n,0} &= -\frac{2(n-2)+1}{2} c_{n-1,0} \\
 &= -\frac{2(n-2)+1}{2} (2(n-1)-1)!! / (-2)^{n-1} \\
 &= (2n-1)(2n-3)!! / (-2)^n \\
 &= (2n-1)!! / (-2)^n. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Was ist besser?

Aus den Formeln allein lässt sich nicht ohne Weiteres schließen, ob die Quadratur besser im Zeit- oder im Frequenzbereich durchgeführt werden sollte. Um Aufschluss darüber zu gewinnen sollen im folgenden noch die Koeffizienten in den jeweiligen Formeln betrachtet werden. Tabelle 3.1 stellt die Koeffizienten bis zur neunten Ableitung in Skalenrichtung sowohl der Wavelettransformierten, als auch ihrer Fouriertransformierten in Zeitrichtung dar.

Aus der Tabelle ist Folgendes ersichtlich:

- Bis einschließlich der sechsten Ableitung der Wavelettransformierten und ihrer Fouriertransformierten nach s sind die Koeffizienten besser im Bereich bis zur dritten Ableitung des Wavelets konzentriert. Auf den ersten Blick scheint es damit, als sei es für Quadraturformeln niedriger Ordnung besser, die Quadratur im Zeitbereich durchzuführen, was natürlich für das jeweils benutzte Wavelet noch im Einzelfall zu prüfen ist.

Tabelle 3.1: *Kumulierte* und *normierte* Gewichte der Koeffizienten in $\frac{\partial^k}{\partial s^k} W_\psi, \frac{\partial^k}{\partial s^k} \hat{W}_\psi$

Zeit	$\psi^{(0)}$	$\psi^{(1)}$	$\psi^{(2)}$	$\psi^{(3)}$	$\psi^{(4)}$	$\psi^{(5)}$	$\psi^{(6)}$	$\psi^{(7)}$	$\psi^{(8)}$	$\psi^{(9)}$
$W_\psi^{(0)}$	1.00									
$W_\psi^{(1)}$	0.33	1.00								
$W_\psi^{(2)}$	0.16	0.79	1.00							
$W_\psi^{(3)}$	0.09	0.61	0.95	1.00						
$W_\psi^{(4)}$	0.05	0.47	0.88	0.99	1.00					
$W_\psi^{(5)}$	0.03	0.36	0.80	0.97	1.00	1.00				
$W_\psi^{(6)}$	0.02	0.28	0.71	0.95	1.00	1.00	1.00			
$W_\psi^{(7)}$	0.01	0.22	0.63	0.91	0.99	1.00	1.00	1.00		
$W_\psi^{(8)}$	0.01	0.18	0.56	0.87	0.98	1.00	1.00	1.00	1.00	
$W_\psi^{(9)}$	0.01	0.14	0.49	0.82	0.96	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
Frequenz	$\hat{\psi}^{(0)}$	$\hat{\psi}^{(1)}$	$\hat{\psi}^{(2)}$	$\hat{\psi}^{(3)}$	$\hat{\psi}^{(4)}$	$\hat{\psi}^{(5)}$	$\hat{\psi}^{(6)}$	$\hat{\psi}^{(7)}$	$\hat{\psi}^{(8)}$	$\hat{\psi}^{(9)}$
$\hat{W}_\psi^{(0)}$	1.00									
$\hat{W}_\psi^{(1)}$	0.33	1.00								
$\hat{W}_\psi^{(2)}$	0.11	0.56	1.00							
$\hat{W}_\psi^{(3)}$	0.10	0.31	0.72	1.00						
$\hat{W}_\psi^{(4)}$	0.14	0.35	0.57	0.86	1.00					
$\hat{W}_\psi^{(5)}$	0.19	0.45	0.66	0.80	0.94	1.00				
$\hat{W}_\psi^{(6)}$	0.23	0.54	0.76	0.88	0.94	0.98	1.00			
$\hat{W}_\psi^{(7)}$	0.26	0.60	0.82	0.93	0.97	0.99	1.00	1.00		
$\hat{W}_\psi^{(8)}$	0.28	0.63	0.85	0.95	0.98	0.99	1.00	1.00	1.00	
$\hat{W}_\psi^{(9)}$	0.29	0.65	0.86	0.96	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

- Ab der siebten Ableitung der Wavelettransformierten kehrt sich dieser Vorteil um; bei der neunten Ableitung der Wavelettransformierten sind im Frequenzbereich immer noch 96% der Koeffizientengewichte auf die Ableitungen 0-3 des Waveletspektrums konzentriert, während es im Zeitbereich nur noch 86% sind. Es scheint also, als sei es für Quadraturformeln hoher Ordnung besser, im Frequenzbereich zu integrieren.

Für gängige Quadraturformeln lässt sich aus den errechneten Koeffizienten kein eindeutiger Vorteil ermitteln. Die Quadratur im Zeitbereich erfordert für jede Skala eine eigene inverse Fouriertransformation, was mit viel Rechenaufwand verbunden sein kann, andererseits führt die Quadratur im Frequenzbereich dazu, dass eventuelle Quadraturfehler – speziell im Bereich hoher Frequenzen – sich nicht mehr nur lokal, sondern global auswirken.

3.4.4.5 Rücktransformation (fast) ohne Quadratur

Eine weitere schnelle – wenn auch näherungsweise – Rücktransformation soll zumindest erwähnt werden: In Anlehnung an eine Idee in [Far92] wird in [TC98] vorgeschlagen, für die Rücktransformation, wie oben, nicht das zur Analyse benutzte Wavelet, sondern die Diracsche δ -Distribution zu verwenden. Damit entfallen zunächst wiederum die Faltungen aus der Rekonstruktionsformel komplett, aber darüber hinaus kann das Integral über die Skalen sogar als Summe geschrieben werden, was der Anwendung der Rechteckregel entspricht:

$$f(z) \approx c_{\psi\delta} \sum_{s \in S} W_{\psi}(s, z).$$

Diese Summe ließe sich noch viel weiter ausdünnen, allerdings erfordert dies allgemeinere Betrachtungen im Rahmen der Theorie der Frames, die über den Inhalt dieser Arbeit hinausgehen, und auch hier tauchen abseits der Quadratur spezielle Probleme hinsichtlich der Korrektheit der Rekonstruktion auf [Dau92, S. 105 Unterpunkt 18].

Kapitel 4

Artefaktbereinigung von EEG-Daten

Im folgenden Abschnitt soll eine Anwendung der kontinuierlichen Wavelettransformation aus der Praxis beschrieben werden. Das Problem entstammt der Gehirnforschung, wo man in manchen Versuchen eine Kombination von einer Folge nacheinander aufgenommener *Magnetresonanztomogramme* und dem zur gleichen Zeit gemessenen *Elektroenzephalogramm* (EEG) benötigt. Problematisch ist in diesem Zusammenhang die Kombination des sehr starken äußeren Magnetfelds des Tomographen im Bereich bis zu 3 Tesla mit dem sehr schwachen EEG, dessen Spannung sich im Bereich einiger Millionstel Volt bewegt, und das durch Elektroden, die direkt am Kopf der untersuchten Person befestigt sind, gemessen wird, während diese im Magnetfeld liegt.

Das starke Magnetfeld führt dazu, dass schon geringste Bewegungen der untersuchten Person – und mit ihr der Elektroden im Magnetfeld – eine Kontamination der EEG-Messung durch Störspannungen bewirken, deren Amplitude so groß ist wie die des Nutzsignals selbst. Zur Verursachung dieser Störung genügen insbesondere schon Bewegungen, wie sie üblicherweise durch den Herzschlag verursacht werden. Diese kleinen Bewegungen führen – vermutlich in Zusammenhang mit weiteren, noch nicht genau erforschten Mechanismen – zu einer permanenten Störung des aufgezeichneten EEGs durch das so genannte *cardioballistische Artefakt* (CBA).

Da das CBA im Rahmen der Messung selbst entsteht, kommt zu dessen Entfernung nur eine nachträgliche Korrektur der erhobenen Daten in Frage, was sich allerdings als schwierig erweist, da

1. die Herzfrequenz der untersuchten Person über den Verlauf der Untersuchung hinweg nicht konstant ist und bei Untersuchungen, in denen starke emotionale Reaktionen provoziert werden können – zum Beispiel

in der Angstforschung – sogar stark schwanken könnte, außerdem

2. das CBA von Elektrode zu Elektrode stark variiert und es
3. zudem nicht klar ist, wie stark sich seine Form von Herzschlag zu Herzschlag ändert.

Bei Betrachtung von Abbildung 4.1 wird deutlich, dass die Korrektur des CBA durchaus problematisch ist, denn zum einen variieren Zeitpunkt und Intensität von Mal zu Mal, aber auch der Mittelwert der gesamten Epochen ist instabil, da das EEG keinen stationären Prozess darstellt.

In der Vergangenheit wurden bereits verschiedene Verfahren zur CBA-Korrektur vorgeschlagen, die sich verschiedenster Methoden bedienen. Die einfachsten Methoden bedienen sich einfacher Mittelungsverfahren [APK⁺98, GSEC00] oder Medianfilter [ELS⁺04], um Templates zu generieren, die dann von den jeweiligen EEG-Epochen subtrahiert werden. Komplexere Methoden ergänzen dies um eine zusätzliche waveletbasierte Rauschunterdrückung [KYP04] oder benutzen adaptive Filter [BPJ⁺02, KYP04].

Eine weitere Klasse von Verfahren bedient sich Methoden, die auf der Analyse von Hauptkomponenten [NBI⁺05] oder unabhängigen Komponenten [SCHL⁺05, BGB⁺06] beruhen. Der Unterschied bei den letzteren ist, dass bei Hauptkomponenten gaußverteilte Prozesse zugrunde gelegt werden, während bei allgemeinen unabhängigen Komponenten gerade diese Voraussetzung sogar negiert wird [Oja00].

4.0.5 Analyse und Korrektur des cardioballistischen Artefakts

Da bei einer einzelnen Störung des EEG nicht von vornherein klar ist, ob ein Zusammenhang mit der Herzaktivität bestehen könnte, muss auf den Herzschlag als Zeitmarkierung für das Auftreten eventueller Störungen zurückgegriffen werden. Dies geschieht durch ein routinemäßiges Mitschreiben der elektrischen Aktivität des Herzens, des so genannten *Elektrokardiogramms* (EKG).

Zur Untersuchung des CBA betrachtet man zunächst das eigentliche EEG als Störsignal, das es zu beseitigen gilt. Die einfachste Methode um dies zu erreichen ist natürlich die Mittelung von anhand des EKG passend aufeinander ausgerichteten EEG-Abschnitten. Um diese Ausrichtung zu erreichen, werden aus dem EKG die so genannten *R-Zacken* extrahiert. Die R-Zacke ist assoziiert mit der Kontraktion der *Ventrikel*. Zu diesem Zeitpunkt ist allerdings die Kontraktion der *Atrien* schon abgelaufen, so dass es durch mechanische

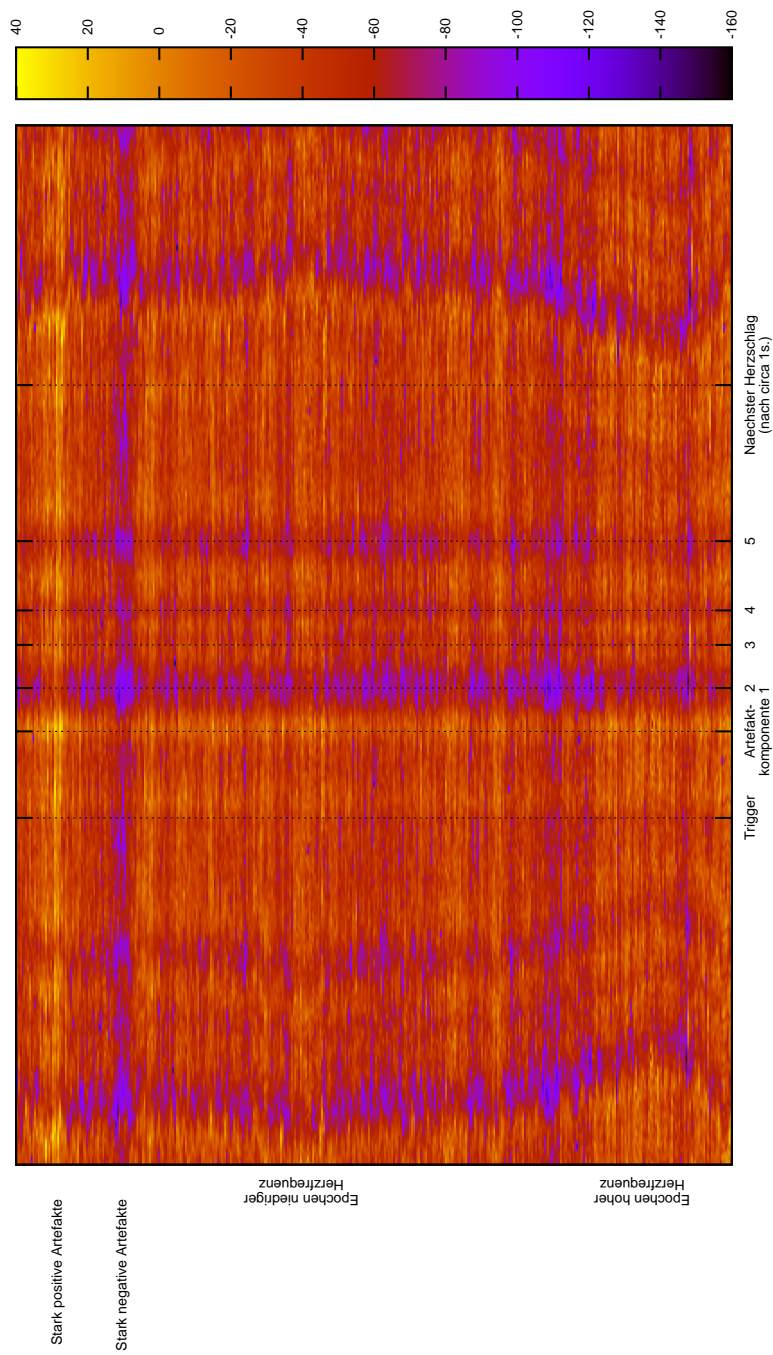


Abbildung 4.1: Rasterdiagramm aufeinander folgender Artefaktepochen an TP10. Die einzelnen Epochen sind fortlaufend von oben nach unten aufgereiht; jede einzelne ist auf den Trigger ausgerichtet. Die wesentlichen Komponenten des Artefakts treten in nahezu jeder Epoche auf, aber der genaue Zeitpunkt des Auftretens schwankt stark, ebenso die Intensität. Anfangs gibt es zwei Zeitabschnitte, in denen sich der Mittelwert der gesamten Epoche einmal stark in positiver und dann in negativer Richtung verschiebt. Es ist außerdem zu sehen, wie die Pulsfrequenz gegen Ende deutlich zunimmt.

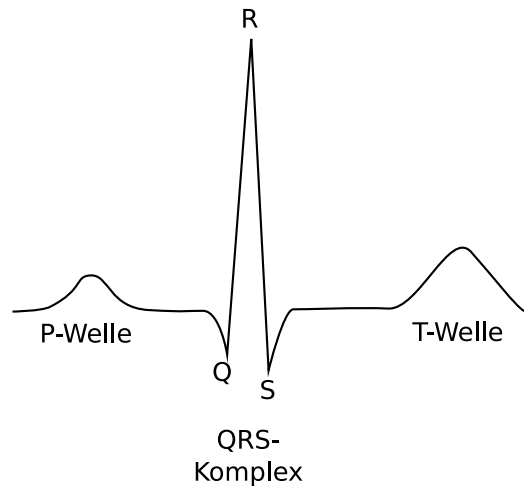


Abbildung 4.2: Schematischer Ablauf eines Herzschlags im EKG. Bei der P-Welle kontrahieren die Atrien, während des QRS-Komplexes die Ventrikel, bei der T-Welle bildet sich die Erregung der Ventrikel wieder zurück.

Erschütterungen schon zu ersten Störungen im EEG kommen könnte, kurz bevor die R-Zacke auftritt. Der typische elektrische Ablauf dieser Vorgänge, wie er sich im EKG zeigt, ist schematisch in Abbildung 4.2 dargestellt.

Bei manchen EEG-Kanälen bringt eine solche Mittelung schon gute Ergebnisse, während bei anderen Kanälen allerlei Störungen zurückbleiben. Letztere Situation ist in Abbildung 4.3 dargestellt.

Betrachtet man die Wavelettransformation eines typischen gemittelten Artefakts, so zeigt sich das Bild aus Abbildung 4.4: Das Artefakt zerfällt in zwei Komponenten, nämlich einen Komplex von Ereignissen höherer Frequenz, die kurz nach dem Herzschlag auftreten, sowie ein niederfrequentes Ereignis, das im Bereich der Herzfrequenz angesiedelt und im Zeitbereich sehr breit ist, und das insbesondere über die benachbarten Herzschläge bei circa $\pm 1s$ hinausragt. Die niederfrequente Komponente besitzt überdies eine starke Phasenkopplung an den Herzschlag und lässt sich anhand dieses Kriteriums, wie Versuche ergaben, auch nicht sinnvoll begrenzen.

Für die Korrektur des CBA werden jedenfalls folgende Hauptpunkte zugrunde gelegt:

1. Aufgrund der großen Unterschiede des Artefakts zwischen verschiedenen Kanälen wird jeder Kanal für sich korrigiert.
2. Über die Form des Artefakts werden keine Annahmen gemacht, außer dass es in einer zeitlich begrenzten Umgebung des Herzschlags auftritt.

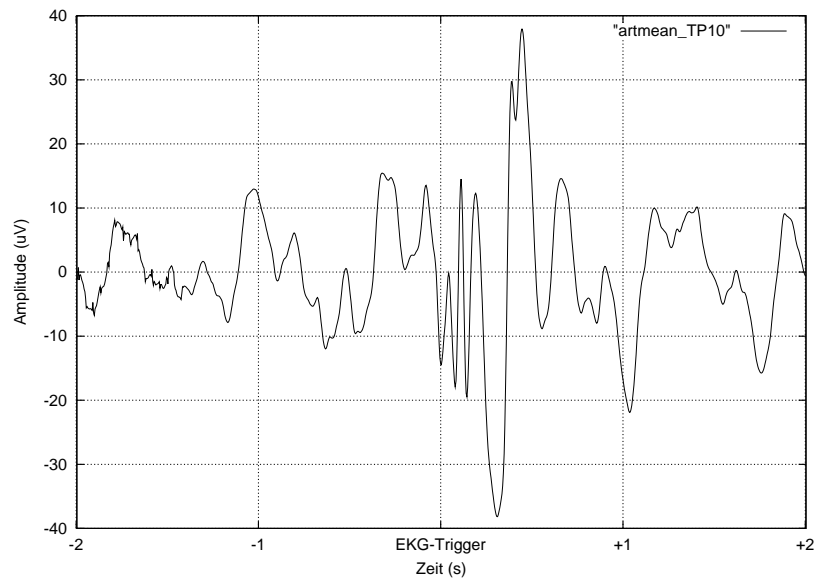


Abbildung 4.3: Mittel des cardioballistischen Artefakts des Kanals TP10. Durch die starke Autokorrelation des Signals hat das Mittel einen viel zu großen Träger, der sich über mehrere Herzschläge erstreckt.

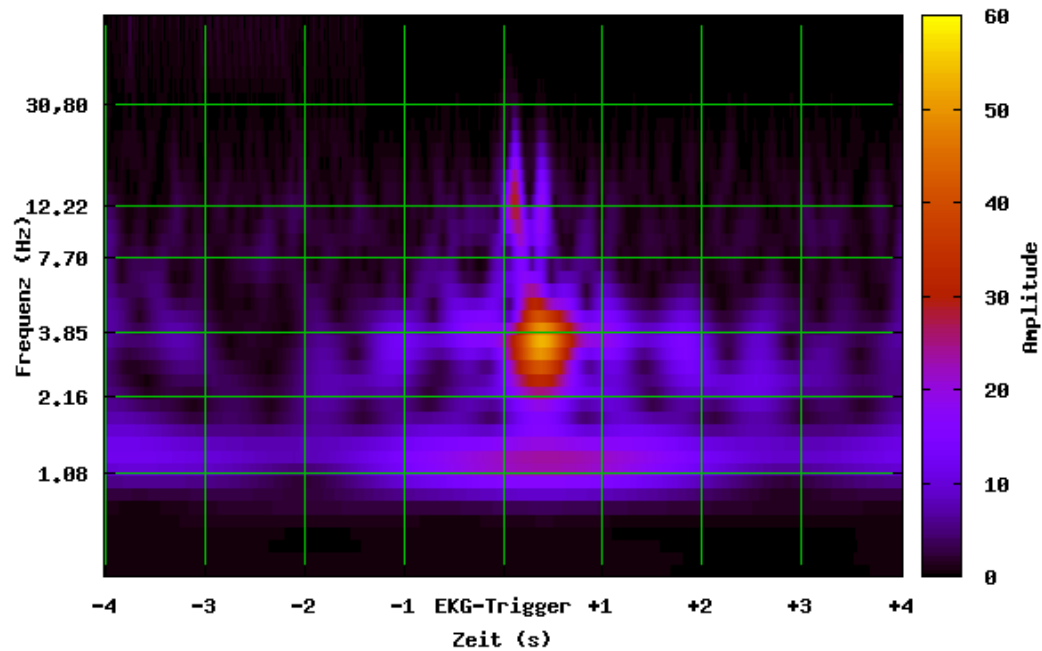


Abbildung 4.4: Wavelettransformation des Artefakts aus Abb. 4.3 mit temperiert skaliert Frequenzachse.

3. Die wesentlichen Komponenten des Artefakts sind in ihrer Phase an den Herzschlag gekoppelt.
4. Beginn und Ende des Auftretens des CBA werden durch Nullstellen markiert.

Die Aufgabe besteht nun darin, das CBA als *Nutzsignal* von Störungen durch das EEG und andere Einflüsse zu befreien, so dass dann eine Bereinigung des EEGs durch Subtraktion des CBAs erreicht werden kann. Die Phasenkoppelung ist dabei ein zentraler Punkt, an den auch die Arbeit von Allen et al. [APK⁺98] anknüpft, wo die hier angestrebte Korrektur unter Zuhilfenahme eines einfachen Mittelungsverfahrens erreicht wird, das natürlich gerade die nicht phasengekoppelten Anteile unterdrückt. Als wichtige Nebenbedingungen sind Speicher- und Rechenzeitverbrauch zu berücksichtigen.

Die naheliegende Idee für die Behandlung phasengekoppelter Vorgänge ist die Zuhilfenahme von Kohärenzmethoden [KSSJ06, MKH07], die jedoch in dieser Situation kaum weiter helfen, da sie die oben angesprochene tieffrequente Komponente nicht sinnvoll in Zeitrichtung begrenzen.

Ein anderer Ansatz ist also nötig, und dieser wird durch die Tatsache ermöglicht, dass die Amplitude des CBA groß ist im Vergleich zur Amplitude des EEG [KAP⁺97, APK⁺98].

Leider haben die in den oben zitierten Arbeiten erwähnten Verfahren über ihre jeweiligen Labors hinaus bislang keine Verbreitung gefunden, so dass als Qualitätsmaßstab für den neuen Algorithmus nur das Verfahren von Allen et al. [APK⁺98] (im Folgenden nur: „Allen“) angesetzt werden kann, das als Modul für eine Standardsoftware aus der Gehirnforschung, den Brain Vision Analyzer (Brain Products GmbH, München), verfügbar ist.

Die Idee für den neuen Algorithmus besteht, wie auch bei Allen, zunächst darin, das CBA als Nutzsignal zu sehen, das durch Zufallsrauschen – hier das EEG – verunreinigt wird. Da das EEG eine vergleichsweise niedrigere Amplitude hat, sind auch die Koeffizienten seiner Wavelettransformierten betragsmäßig kleiner als die des CBA. Es ist also zu erwarten, dass ein Verwerfen der Waveletkoeffizienten unterhalb einer gewissen Schwelle im Wesentlichen das störende EEG unterdrückt, aber das CBA intakt lässt. Als Schwellenwert wird im Folgenden der Betragsmedian der jeweiligen Wavelettransformierten gewählt.

Die reine Bereinigung des Artefakts durch das Unterdrücken der Waveletkoeffizienten unterhalb des Betragsmedians reicht jedoch alleine nicht aus, um ein gutes Ergebnis sicherzustellen, da immer noch zu viele unerwünschte Anteile übrig bleiben und der Träger des so berechneten CBAs immer noch zu breit ist. Hier schaffen eine Mittelung über mehrere vorangegangene Artefakte und das Begrenzen im Zeitbereich Abhilfe.

Da das Verfahren im Wesentlichen datengetrieben sein soll und die Qualität zunächst anhand von künstlich kontaminierten Daten bewertet wird, wird für die Begrenzung im Zeitbereich auf eine heuristische zeitliche Verschiebung des Zeitfensters im Vergleich zur R-Zacke – im Gegensatz zu Allen – verzichtet; die Zahl der vorangegangenen Epochen für die Mittelung wird auf 10 festgesetzt¹ und ebenso wenig findet eine ebenfalls heuristische Zurückweisung eventuell unbrauchbarer Epochen statt, da dies den methodischen Rahmen an dieser Stelle sprengen und durch die kontrollierten Bedingungen nichts zur Qualität der Datenbereinigung beitragen würde.

Der Pseudocode des engültigen Verfahrens ist, auf Nachvollziehbarkeit optimiert, in Algorithmus 1 dargestellt. Dabei ist zu bemerken, dass das Ausmaskieren von Teilen der Wavelettransformierten in Schritt 7 natürlich zu einer im Prinzip „unmöglichen“ Wavelettransformierten führt, die sich jedoch trotzdem problemlos zurücktransformieren lässt.

Abbildung 4.5 zeigt noch einmal, wie in den einzelnen Schritten des Algorithmus nach und nach das Artefakt vom EEG getrennt wird und Abbildung 4.6 zeigt die Gegenüberstellung eines mit dem Algorithmus bereinigten EEG-Ausschnitts mit seiner ursprünglichen und kontaminierten Version.

4.0.6 Ergebnisse und kritische Bewertung

Zur Bewertung der Qualität der Bereinigung wurde zunächst ein reines, artefaktfreies EEG-Signal durch ein künstliches, aus einem EKG-Signal erzeugtes Artefakt kontaminiert und danach sowohl mit dem hier vorgestellten, als auch mit dem vom Allen vorgeschlagenen Algorithmus bereinigt [Geb10]. Die paarweisen Korrelationen geben sodann Aufschluss über die Qualität der Bereinigung.

Die Tabellen 4.1 und 4.2 zeigen die Ergebnisse dieser Korrelationsanalyse, welche einen gewissen Interpretationsspielraum lassen. Während Tabelle 4.1 zeigt, dass die waveletbasierte Bereinigung in der Korrelation dem Originalsignal näher kommt, als es der Allen-Algorithmus tut, könnte man aus 4.2 den Schluss ziehen, dass dem Allen-Algorithmus die Dekorrelation zum Artefakt besser gelingt, ja sogar eine leichte Überkorrektur erreicht wird, während die Dekorrelation mit dem Wavelet-Algorithmus weniger erfolgreich ist. Welches dieser Ergebnisse die wichtigeren Erkenntnisse liefert kann jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht entschieden werden.

¹Bei einem Ruhepuls von 60 Herzschlägen pro Minute ergibt sich somit eine Beeinflussung der aktuell zu korrigierenden Epoche durch die Artefakte der vorangegangenen 6 Sekunden. Der Zeitrahmen ist hier also enger gesteckt als bei Allen, wo jeweils 10 Sekunden veranschlagt werden, aber die Festsetzung bleibt letztendlich willkürlich.

Algorithmus 1 Waveletbasierte Artefaktbereinigung eines EEG-Kanals.

Eingabe:

- EEG : Vektor, der einen EEG-Kanal als Zeitreihe enthält.
- EKG : Aufsteigend geordneter Vektor, der Positionen in EEG dem Auftreten von R-Zacken zuordnet. Es muss $EKG(1) > s$ gelten.
- $s = 1000$ gibt an, dass sich die Wavelettransformation um ± 1000 Samples um die jeweilige R-Zacke erstreckt.
Dies stellt lediglich sicher, dass der relevante Zeit-Frequenz-Bereich nicht von Randartefakten der Wavelettransformation beeinflusst wird.

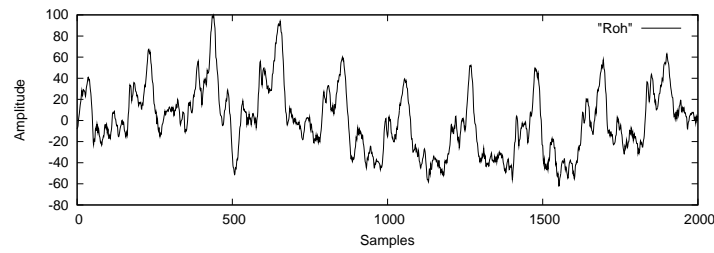
```

1:  $me2 = \text{median}(\text{diff}(EKG))/2$ ;
2:  $l = 2 * s + 1$ ;
3:  $l2 = \text{fix}(l/2)$ ;
4: for  $k = 1 : \text{length}(EKG)$ 
5:    $t = EKG(k)$ ;
   Waveletbasiertes Entrauschen
6:    $WT = \text{WaveletTransformation}(\text{center}(EEG(t - s : t + s)))$ ;
7:    $WT.* = \text{abs}(WT) > \text{median}(\text{vec}(\text{abs}(WT)))$ ;
8:    $DENOISED(k,:) = \text{real}(\text{InverseWaveletTransformation}(WT))$ ;
9: end
   Wenn möglich, dann 10 vorausgehende entrauschte Artefakte mitteln...
10: for  $k = 1 : \text{rows}(DENOISED)$ 
11:    $CLEAN = \text{mean}(DENOISED(\text{min}(1, k - 9) : k), :)$ ;
   ... und den Träger im Zeitbereich begrenzen:
   Vorzeichenwechsel aufspüren
12:    $ds = \text{diff}(\text{sign}(CLEAN))$ ;
   Frühesten und spätesten relevanten Vorzeichenwechsel bestimmen ...
13:    $lower = \text{find}(ds(1 : l2 - me2))(\text{end}) + 1$ ;
14:    $upper = \text{find}(ds(1 : l2 + me2))(\text{end}) + 1$ ;
   ... und anhand derer maskieren:
15:    $CLEAN.* = ((1 : l \geq lower) \& (1 : l \leq upper))$ ;
   Jetzt die Datenbereinigung durchführen
16:    $indices = EKG(k) - s : EKG(k) + s$ ;
   ... und subtrahieren
17:    $EEG(indices) - = CLEAN$ ;
18: end

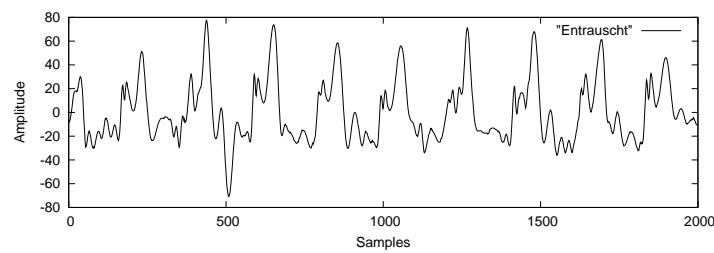
```

Ausgabe:

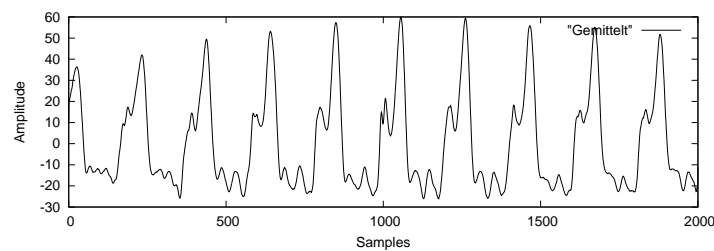
EEG enthält das bereinigte EEG-Signal.



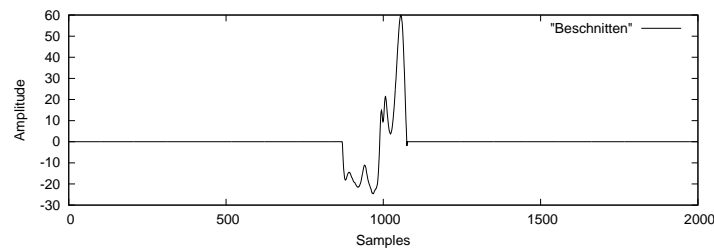
(a) In den Rohdaten sind die Artefakte noch deutlich sichtbar vom EEG mit seinen hochfrequenten Anteilen und tieffrequenten Fluktuationen überlagert.



(b) Nach dem waveletbasierten Entrauschen sind sowohl die hoch- als auch die niederfrequenten Störungen verschwunden.



(c) Nach der Mittelung bleiben nur für das Artefakt in der Mitte (bei 1000 Samples) starke hochfrequente Details übrig.



(d) Zuletzt maskiert der Beschnitt die irrelevanten früheren und späteren Artefakte aus.

Abbildung 4.5: Die Behandlung der Artefakte in Algorithmus 1. In mehreren Schritten wird aus der kontaminierten EEG-Zeitreihe das eigentliche Artefakt ausgefiltert, so dass es zur Bereinigung subtrahiert werden kann.

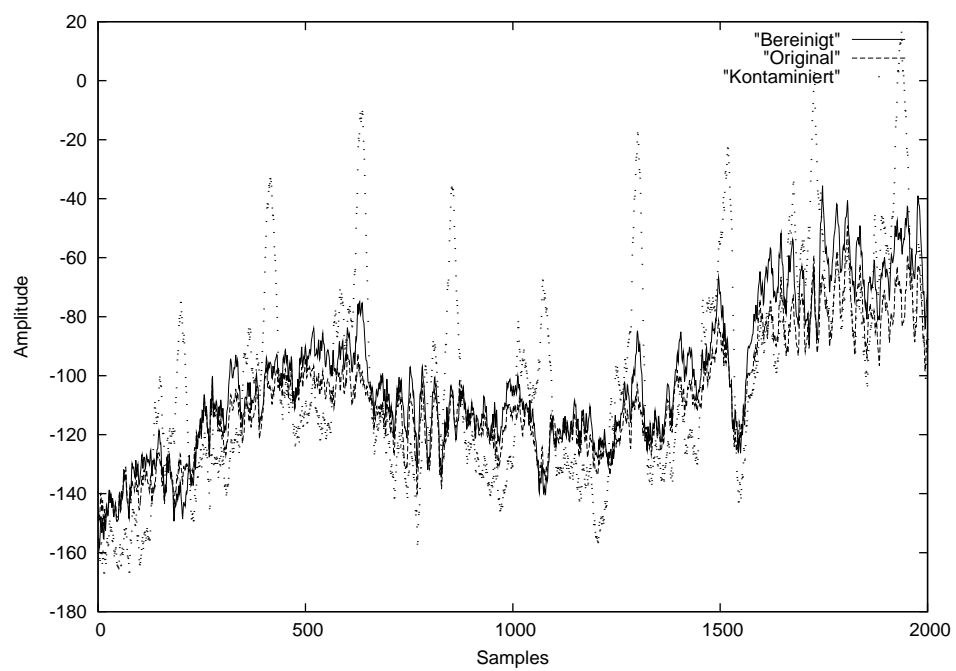


Abbildung 4.6: Das Ergebnis der Datenbereinigung nach Algorithmus 1: Nach der Bereinigung kommt das Signal der ursprünglichen Version wieder recht nahe, während in der kontaminierten Version das cardioballistische Artefakt alles dominiert.

Tabelle 4.1: Korrelationskoeffizienten des unkontaminierten Originalsignals mit dem kontaminierten Signal und den bereinigten Signalen [Geb10]. Die waveletbasierte Korrektur erreicht eine höhere Korrelation mit dem Originalsignal als der Allen-Algorithmus und reproduziert nach der Korrektur auch die Korrelation des unkontaminierten und des kontaminierten Signals. Alle Unterschiede zwischen den Koeffizienten sind hoch signifikant mit $p \ll 0.001$.

Korrelation	Unkont.	Kont.	Allen	Wavelet
Unkont.	1			
Kont.	0.79	1		
Allen	0.94	0.74	1	
Wavelet	0.96	0.78	0.96	1

Tabelle 4.2: Korrelationskoeffizienten des Artefakts und des kontaminierten Signals mit dem unkontaminierten und den bereinigten Signalen [Geb10]. Nach der Allen-Korrektur besteht eine schwächere Korrelation zum Artefakt als zwischen unkontaminiertem Originalsignal und Artefakt. Andererseits bleibt nach der waveletbasierten Korrektur die Korrelation zum Artefakt höher als zwischen unkontaminiertem Signal und Artefakt. Alle Unterschiede zwischen den Koeffizienten sind hoch signifikant mit $p \ll 0.001$.

Korrelation	Artefakt	Unkont.	Allen	Wavelet
Artefakt	1	0.24	0.22	0.27
Kont.	0.79	0.79	0.74	0.75

Es bleibt zu bemerken, dass die waveletbasierte Bereinigung deutlich mehr Rechenzeit verbraucht, da die medianbasierte Filterung für jede kontaminierte Epoche im EEG durchgeführt werden muss, was dazu führt, dass die Bereinigung eines ganzen EEG-Datensatzes mit circa 30 Kanälen mehrere Stunden Rechenzeit in Anspruch nimmt², selbst mit der schnellen Rücktransformation aus Bemerkung 6.

Eine Anwendung auf echte Versuchsdaten zeigt, dass der neue Algorithmus die Artefaktpower von $78.91\mu V^2/Hz$ auf $32.04\mu V^2/Hz$ reduziert und damit deutlich effektiver ist als der Allen-Algorithmus, der $39.28\mu V^2/Hz$ erreicht [Geb10].

Dabei handelte es sich um EEG-Daten, die entsprechend dem 10/20-System in 30 Kanälen aufgezeichnet wurden. Die Referenz lag zwischen Fz

²Auf einem gängigen Desktop-PC mit Core2-Quad-Prozessor bei 2.26GHz Taktfrequenz und Benutzung nur eines Kerns. Durch die fortschreitende Parallelisierung sollten sich hier mit Hilfe von Threading und Verwendung von Bibliotheken wie OpenCL und CUDA noch erhebliche Beschleunigungen erzielen lassen.

und Cz. Die Daten wurden mit 16 Bit und einer Auflösung von 500nv/Bit digitalisiert, entsprechend einem Maximalbereich von circa $\pm 16\text{mV}$. Die Abtastfrequenz betrug 5kHz und die Breite des Bandpassfilters 0.1Hz–250Hz. Abschließend wurde ein Downsampling auf 250Hz vorgenommen.

Während des Versuchsablaufs wurden den Versuchspersonen in einer Lernphase 1, 3 oder 5 Pseudowörter für jeweils 800ms präsentiert, die diese behalten mussten. Nach einer Behaltensphase von 6000ms, während der ein Fixationskreuz gezeigt wurde, wurde ein weiteres Pseudowort präsentiert, von dem entschieden werden musste, ob es bereits während der Lernphase präsentiert worden war. Pro Versuchsperson gab es jeweils 120 Durchgänge.

Alle Angaben zum Versuch beruhen auf [Geb10].

Kapitel 5

Die Matrixwavelet-Transformation

In diesem Kapitel wird nun der skalare Fall verlassen und die Theorie für vektorwertige Funktionen und matrixwertige Wavelets, die aber beide immer noch von einem *skalaren* Argument abhängen, entwickelt. Insofern wird auch keine mehrdimensionale Fourieranalysis betrieben, sondern es werden immer nur *komponentenweise* Fouriertransformierte betrachtet, für $F := (f_1(t), \dots, f_n(t))$ ist also $\hat{F}(\omega) := (\hat{f}_1(\omega), \dots, \hat{f}_n(\omega))$.

5.1 Definition

Definition 28 Seien zu $n \in \mathbb{N}$ eine vektorwertige Funktion $f(\mathbb{C}) \in \mathcal{L}_2^n$ und eine matrixwertige Funktion $\Psi(\mathbb{C}) \in \mathcal{L}_2^{n \times n}$ gegeben. Zu diesen wird formal eine Transformation wie folgt definiert:

$$W_\Psi f(s, t) := \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\Psi\left(\frac{\tau - t}{s}\right)} f(\tau) d\tau.$$

Dabei heißt t wieder *Translationsparameter* und s *Skalierungsparameter*. Handelt es sich bei Ψ um ein (noch zu definierendes) Matrixwavelet, so heißt $W_\Psi f(s, t)$ die *Matrixwavelet-Transformation* von f zum Matrixwavelet Ψ .

Man hat es also mit einer Transformation zu tun, die einen n -dimensionalen Vektor von Funktionen auf einen anderen n -dimensionalen Vektor von Funktionen abbildet, und zwar dergestalt, dass man für jeden Zeitpunkt t im weitesten Sinne einen empirischen Korrelationskoeffizienten zwischen den Zeilenvektoren der Funktion Ψ und der Funktion f berechnet, und dann über diese Koeffizienten integriert.

Andererseits kann man sich auch auf den Standpunkt stellen, dass zunächst durch die Elementfunktionen von Ψ eine Transformation der einzelnen Elementfunktionen von f bewirkt und dann durch das Matrixprodukt über diese Transformaten summiert wird. Es gilt dann also

$$(W_{\Psi}f(s, t))_k := \frac{1}{\sqrt{|s|}} \sum_{l=1}^n \int_{\mathbb{R}} \overline{\Psi_{kl}} \left(\frac{\tau - t}{s} \right) \cdot f_l(\tau) d\tau. \quad (5.1)$$

Diese zunächst recht willkürlich erscheinende Interpretation wird in Kapitel 7 ihre Berechtigung erfahren.

Anschaulich bedeutet diese Definition für den *Frequenzbereich* jedenfalls, dass für alle Frequenzen jede Zeile der Fouriertransformierten des Matrixwavelets auf ihre Ähnlichkeit mit der Fouriertransformierten der Daten hin untersucht wird.

5.2 Zulässigkeit

Analog zur Zulässigkeitskonstanten bei normalen Wavelets definiert man für Matrixwavelets eine Zulässigkeitsmatrix, die invertierbar sein muss und deren Elemente existieren müssen. Da man bei einer Matrix über die Konjugation hinaus noch entscheiden kann, ob man transponieren will oder nicht, ergeben sich sogar zwei Formeln für die Zulässigkeit eines Matrixwavelets mit jeweils dazugehöriger Invertierungsformel. Hier soll zunächst von der Form die Rede sein, die die schöneren Zulässigkeitsmatrizen – nämlich hermitesch positiv definite – produziert. Weitere Formen der Zulässigkeit, die insbesondere zu sehr schnellen Invertierungsformeln führen, werden später in Kapitel 6 abgehandelt.

Bemerkung 8 Für die folgenden Betrachtungen wäre $\int_{\mathbb{R}} \hat{\Psi}^H(\omega) \cdot \hat{\Psi}(\omega) d\omega$ das kanonische innere Produkt und die im Folgenden statt dessen immer wieder gebrauchte Formulierung mit $\int_{\mathbb{R}} \hat{\Psi}^T(\omega) \cdot \hat{\Psi}(\omega) d\omega = \int_{\mathbb{R}} \hat{\Psi}^H(\omega) \cdot \hat{\Psi}(\omega) d\omega$ entspringt der Idee, dass in der Transformation

$$W_{\Psi}f(s, t) := \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\Psi} \left(\frac{\tau - t}{s} \right) f(\tau) d\tau$$

sowohl eine *Transposition* der Waveletmatrix als auch eine *Konjugation* der ohnehin (meist) reellen Eingabedaten vermieden werden kann.

Da aber die zusätzliche Konjugation die Definitheit des Produkts nicht ändert, können viele der folgenden Argumente darauf zurückgreifen, dass auch $\hat{\Psi}^T(\omega) \cdot \hat{\Psi}(\omega)$ automatisch hermitesch und positiv definit ist. Ein kleiner

Unterschied besteht weiterhin darin, dass im Beweis der Rücktransformation der $\overline{\ast}$ -Operator aus Gleichung 2.2 statt der normalen Korrelation auftauchen wird, da schon die Hintransformation auf ihm beruht.

Definition 29 Sei zu $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion Ψ in $\mathcal{L}_2^{n \times n}(\mathbb{C})$ gegeben, dann heißt die Matrix definiert durch

$$C_\Psi := \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{\Psi}^T(\omega) \overline{\hat{\Psi}}(\omega)}{|\omega|} d\omega$$

die *Zulässigkeitsmatrix vermöge Transposition* oder auch einfach Zulässigkeitsmatrix zu Ψ . Existiert dieses C_Ψ in dem Sinn, dass seine Elemente endlich sind und ist es zudem invertierbar, dann heißt Ψ *zulässig vermöge Transposition* oder auch einfach *zulässig* und wird auch als *n-dimensionales Matrixwavelet vermöge Transposition* oder einfach *Matrixwavelet* bezeichnet.

Dies ist nicht die einzige Form von Zulässigkeit, jedoch taucht im Zähler der Definition von C_Ψ im Wesentlichen das kanonische innere Produkt von $\mathcal{L}_2^{n \times n}(\mathbb{C})$ auf, das sehr angenehme Eigenschaften hat, was auch die allgemeine Bezeichnung einer solchen Funktion als *Matrixwavelet* rechtfertigt.

Lemma 10 Die Diagonaleinträge von C_Ψ sind nichtnegativ.

BEWEIS Nach Definition ist

$$\begin{aligned} (C_\Psi)_{kk} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\left(\hat{\Psi}^T(\omega)\right)_{k \cdot} \left(\overline{\hat{\Psi}}(\omega)\right)_{\cdot k}}{|\omega|} d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\left(\hat{\Psi}(\omega)\right)_{\cdot k} \left(\overline{\hat{\Psi}}(\omega)\right)_{\cdot k}}{|\omega|} d\omega \geq 0. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

5.2.1 Wann ist C_Ψ invertierbar?

Satz 21 Für ein Matrixwavelet $\Psi \in \mathcal{L}_1^{n \times n}(\mathbb{C})$ genügt es zur Zulässigkeit, dass die Einträge von C_Ψ endlich sind und für mindestens ein $\zeta \in \mathbb{R}$ die Matrix $\hat{\Psi}(\zeta)$ invertierbar ist.

BEWEIS Unter den gegebenen Voraussetzungen sind zunächst alle Einträge von $\hat{\Psi}$ stetig und weil $\det \hat{\Psi}$ stetig von ζ abhängt, existiert $0 < \epsilon < |\zeta|$, so dass $\hat{\Psi}$ in einer Umgebung $U_\epsilon(\zeta)$ invertierbar ist. Darüber hinaus ist die Matrix $\hat{\Psi}^H \Psi = \hat{\Psi}^T \overline{\Psi}$ immer positiv definit und auf $U_\epsilon(\zeta)$ sogar strikt positiv definit,

da $\det \hat{\Psi}(\omega) \neq 0$ für $\omega \in U_\epsilon(\zeta)$. Für einen beliebigen Vektor $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ folgt also:

$$\begin{aligned}
 v^H C_\Psi v &= v^H \left(\int_{U_\epsilon(\zeta)} \frac{\overline{\hat{\Psi}^H(\omega)} \hat{\Psi}(\omega)}{|\omega|} d\omega + \int_{\mathbb{R} \setminus U_\epsilon(\zeta)} \frac{\overline{\hat{\Psi}^H(\omega)} \hat{\Psi}(\omega)}{|\omega|} d\omega \right) v \\
 &= v^H \int_{U_\epsilon(\zeta)} \frac{\hat{\Psi}^T(\omega) \hat{\Psi}(\omega)}{|\omega|} d\omega v + v^H \int_{\mathbb{R} \setminus U_\epsilon(\zeta)} \frac{\hat{\Psi}^T(\omega) \hat{\Psi}(\omega)}{|\omega|} d\omega v \\
 &\geq v^H \int_{U_\epsilon(\zeta)} \frac{\hat{\Psi}^T(\omega) \hat{\Psi}(\omega)}{|\omega|} d\omega v \\
 &= \int_{U_\epsilon(\zeta)} \frac{v^H \hat{\Psi}^T(\omega) \hat{\Psi}(\omega) v}{|\omega|} d\omega > 0 \quad .
 \end{aligned}$$

Damit ist auch C_Ψ strikt positiv definit und damit invertierbar. ■

Natürlich ist C_Ψ immer invertierbar, wenn auf der Diagonalen keine und sonst überall Nullen stehen. Eine Antwort auf die Frage, wie „diagonal“ $\hat{\Psi}(\omega)$ mindestens werden muss, damit C_Ψ invertierbar wird, liefert zum Beispiel die Eigenwertabschätzung nach Gerschgorin.

Definition 30 Wenn $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix ist, für die für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt, dass $|M_{kk}| > \sum_{l \neq k} |M_{kl}|$, dann heißt M *strikt diagonaldominant (nach Zeilen)*.

Korollar 8 Eine matrixwertige Funktion $\Psi \in \mathcal{L}_1^{n \times n}(\mathbb{C})$, für die die Einträge in C_Ψ existieren und für die für ein $\zeta \in \mathbb{R}$ gilt, dass $\hat{\Psi}(\zeta)$ strikt diagonaldominant ist, ist zulässig.

BEWEIS Nach dem Satz von Gerschgorin [Ste01, Theorem 3.2] gilt für die Menge der Eigenwerte Λ von $\hat{\Psi}(\zeta)$, dass

$$\Lambda \subset \bigcup_{k=1}^n G_i, \text{ mit } G_i := \left\{ \mu : \left| \mu - \hat{\Psi}(\zeta)_{kk} \right| \leq \sum_{l \neq k} \left| \hat{\Psi}_{kl}(\zeta) \right| \right\}.$$

Wegen der strikten Diagonaldominanz von $\hat{\Psi}(\zeta)$ gilt jedoch $0 \notin G_i \forall i$, also hat $\hat{\Psi}(\zeta)$ keinen Eigenwert 0, ist damit invertierbar, und die Behauptung folgt mit Satz 21. ■

Und direkt weiter:

Korollar 9 Ist $\Psi \in \mathcal{L}_2^{n \times n}(\mathbb{C})$ eine Funktion, für die C_Ψ existiert und strikt diagonaldominant ist, so ist Ψ ein Matrixwavelet.

5.2.2 Wann existieren die Einträge in C_Ψ ?

Über die Kriterien für Invertierbarkeit hinaus werden natürlich noch Kriterien benötigt um zu entscheiden, wann die Einträge in C_Ψ endlich sind. Im folgenden soll untersucht werden, wie man Ψ mit eindimensionalen Wavelets so besetzen kann, dass C_Ψ existiert. Erfreulicherweise wird sich herausstellen, dass die Existenz von C_Ψ schon dadurch sichergestellt, dass man Ψ mit irgendwelchen Wavelets besetzt.

Bemerkung 9 Da die Elemente in C_Ψ endliche Summen komplexer Zahlen sind, die ihrerseits wieder daraus entstehen, dass das Integral über das Produkt zweier Funktionen gebildet wird, genügt es, sich mit der Endlichkeit der einzelnen Integrale zu befassen. Da außerdem das betrachtete Matrixprodukt von der Form $B = A^H \cdot A$ ist, errechnet man, $B_{kl} = \sum_{m=1}^n A_{km}^H A_{ml} = \sum_{m=1}^n \overline{A_{mk}} A_{ml}$ und sieht, dass im Zuge der Berechnung des Matrixprodukts alle Elemente einer Zeile A_m mit allen anderen Elementen der gleichen Zeile A_m multipliziert werden, so dass auch nur die Produkte untersucht werden müssen.

Satz 22 *Sei die Matrixwertige Funktion Ψ besetzt mit eindimensionalen Wavelets, so ist $C_\Psi < \infty$.*

BEWEIS Für beliebig gewählte Einträge φ, ψ von Ψ gilt zunächst die Zulässigkeitsbedingung und daher gilt automatisch auch

$$\int_{[-1;1]} \frac{|\hat{\varphi}(\omega)|}{\sqrt{|\omega|}} d\omega, \int_{[-1;1]} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|}{\sqrt{|\omega|}} d\omega < \infty,$$

denn die jeweilige eventuelle Singularität bei $\omega = 0$ wird durch das Ziehen der Wurzel gutartiger bezüglich Integration. Man wendet nun die Hölder-Ungleichung an, erhält

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\overline{\hat{\varphi}(\omega)} \hat{\psi}(\omega)}{|\omega|} \right| d\omega \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\varphi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\xi} \cdot \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\xi} = \sqrt{c_\varphi c_\psi} < \infty$$

■

und mit Bemerkung 9 folgt die Behauptung.

Satz 23 *Sei für $k, n \in \mathbb{N}$ die Funktion $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ mit k -mal differenzierbaren Elementfunktionen und $F_1 := \int_{\mathbb{R}} \left\| \left(\hat{\Psi}^T \cdot \hat{\Psi} \right) (\omega) \right\|_F d\omega < \infty$ gegeben.*

Sei darüberhinaus $\Psi^{(k)}(t) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{C})$, $F_2 := \int_{\mathbb{R}} \left\| \left(\widehat{\Psi^{(k)}} \right)^T \cdot \overline{\widehat{\Psi^{(k)}}} \right\|(\omega) \Big\|_F d\omega < \infty$ und $\widehat{\Psi^{(k)}}(\omega)$ invertierbar für ein $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dann ist $\Psi^{(k)}$ ein Matrix-wavelet.

BEWEIS Man bemerkt zunächst, dass mit dem gleichen Argument wie im Beweis zu Satz 21 die Invertierbarkeit von $C_{\Psi^{(n)}}$ garantiert ist, falls es überhaupt existiert. Mit den Rechenregeln für die Fouriertransformation gilt:

$$\begin{aligned}
\|C_{\Psi^{(k)}}\|_F &= \left\| \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{\Psi^{(k)}}^T(\omega) \cdot \overline{\widehat{\Psi^{(k)}}}(\omega)}{|\omega|} d\omega \right\|_F \\
&= \left\| \int_{\mathbb{R}} \frac{(-i\omega)^k \hat{\Psi}^T(\omega) \cdot \overline{(-i\omega)^k \hat{\Psi}(\omega)}}{|\omega|} d\omega \right\|_F \\
&= \left\| \int_{\mathbb{R}} \omega^{2k} \frac{\hat{\Psi}^T(\omega) \cdot \overline{\hat{\Psi}(\omega)}}{|\omega|} d\omega \right\|_F \\
&\leq \left\| \int_{[-1;1]} \omega^{2k-1} \hat{\Psi}^T(\omega) \cdot \overline{\hat{\Psi}(\omega)} d\omega \right. \\
&\quad \left. + \int_{\mathbb{R} \setminus [-1;1]} |\omega|^{2k} \frac{\hat{\Psi}^T(\omega) \cdot \overline{\hat{\Psi}(\omega)}}{|\omega|} d\omega \right\|_F \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left\| \left(\hat{\Psi}^T \cdot \overline{\hat{\Psi}} \right)(\omega) \right\|_F d\omega \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} \left\| \left(\widehat{\Psi^{(k)}} \right)^T \cdot \overline{\widehat{\Psi^{(k)}}} \right\|(\omega) \Big\|_F d\omega \\
&= F_1 + F_2 < \infty \quad .
\end{aligned}$$

■

5.3 Kombinationen von Matrixwavelets

Eine weitere interessante Frage ist die, wie sich aus vorhandenen Matrix-wavelets neue schaffen lassen. Gängige Verfahren in einer Dimension sind die Addition und die Faltung bestehender Wavelets. Für die folgenden Sätze muss zunächst der Träger einer matrixwertigen Funktion definiert werden.

Definition 31 Sei $n \in \mathbb{N}$ und $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ eine matrixwertige Funktion, dann heißt

$$\text{supp } F := \bigcup_{k,l=1}^n \text{supp } F_{kl}$$

der *Träger* der Funktion.

Für die Addition zweier Matrixwavelets ist die einfachste hinreichende Bedingung zur Zulässigkeit ihrer Summe, dass es $\zeta \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\det \left(\hat{\Phi}(\zeta) + \hat{\Psi}(\zeta) \right) \neq 0$ gilt. Das Argument dabei ist das selbe wie in Satz 21. Einige weitere, speziellere Bedingungen sind im Folgenden aufgeführt.

Satz 24 *Seien Φ, Ψ n -dimensionale Matrixwavelets mit $\text{supp } \hat{\Phi} \cap \text{supp } \hat{\Psi} = \emptyset$, dann ist $\Phi + \Psi$ ein Matrixwavelet.*

BEWEIS Es gilt zunächst

$$\begin{aligned} C_{\Phi+\Psi} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\left(\hat{\Phi}(\omega) + \hat{\Psi}(\omega) \right)^T \overline{\left(\hat{\Phi}(\omega) + \hat{\Psi}(\omega) \right)}}{|\omega|} d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{\Phi}^T(\omega) \overline{\hat{\Phi}(\omega)} + \hat{\Phi}^T(\omega) \overline{\hat{\Psi}(\omega)} + \hat{\Psi}^T(\omega) \overline{\hat{\Phi}(\omega)} + \hat{\Psi}^T(\omega) \overline{\hat{\Psi}(\omega)}}{|\omega|} d\omega \\ &= C_{\Phi} + C_{\Psi} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{\Phi}^T(\omega) \overline{\hat{\Psi}(\omega)} + \hat{\Psi}^T(\omega) \overline{\hat{\Phi}(\omega)}}{|\omega|} d\omega}_{=0}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist damit $C_{\Phi+\Psi}$ invertierbar und es folgt die Behauptung. ■

Disjunkte Träger sind allerdings eine starke Voraussetzung; insbesondere bedeuten sie auch verschiedene zentrale Frequenzen. Man kann aber die Voraussetzung abschwächen, so dass lediglich für alle $k, l \leq n$ die Funktionen $\left(\hat{\Phi}(\omega)^T \right)_{k,l}$ orthogonal sein müssen zu den Funktionen $\left(\overline{\hat{\Psi}(\omega)} \right)_{l,k}$ in dem Sinn dass $\int_{\mathbb{R}} \left(\hat{\Phi}(\omega)^T \right)_{k,l} \left(\overline{\hat{\Psi}(\omega)} \right)_{l,k} d\omega = 0$, denn dann gilt das folgende Korollar.

Korollar 10 *Seien Φ, Ψ n -dimensionale Matrixwavelets, so dass für alle $k, l \leq n$ gilt $\int_{\mathbb{R}} \left(\hat{\Phi}(\omega)^T \right)_{k,l} \left(\overline{\hat{\Psi}(\omega)} \right)_{l,k} d\omega = 0$, dann ist $\Phi + \Psi$ ein Matrixwavelet.*

BEWEIS Unter den gegebenen Voraussetzungen gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{\Phi}^T(\omega) \overline{\hat{\Psi}(\omega)} + \hat{\Psi}^T(\omega) \overline{\hat{\Phi}(\omega)}}{|\omega|} d\omega = 0$$

und die Behauptung folgt analog zum Beweis von Satz 24. ■

Und noch eine weitere Abschwächung ist möglich: Es reicht auch, wenn für alle $k \leq n$ und $\omega \in \mathbb{R}$ alle Zeilen $\left(\hat{\Phi}(\omega)^T\right)_{k,\cdot}$ orthogonal zu allen Spalten $\left(\hat{\Psi}(\omega)\right)_{\cdot,k}$ sind, denn auch dann folgt völlig analog, dass

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{\Phi}(\omega)^T \hat{\Psi}(\omega) + \hat{\Psi}^T(\omega) \hat{\Phi}(\omega)}{|\omega|} d\omega = 0,$$

und damit ein weiteres Korollar.

Korollar 11 *Seien Φ, Ψ n -dimensionale Matrixwavelets, so dass für alle $k \leq n$ gilt $\int_{\mathbb{R}} \left(\hat{\Phi}(\omega)^T\right)_{k,\cdot} \left(\hat{\Psi}(\omega)\right)_{\cdot,k} d\omega = 0$, dann ist $\Phi + \Psi$ ein Matrixwavelet.*

BEWEIS Analog zum Beweis von Satz 24, beziehungsweise dem des vorherigen Korollars. ■

Ein ganz anderer Ansatz ist die komponentenweise Faltung zweier Matrixwavelets, die auch wieder zu einem Matrixwavelet führen kann.

Satz 25 *Seien $\Phi, \Psi \in \mathcal{L}_1^{n \times n}(\mathbb{C})$ n -dimensionale Matrixwavelets, deren Elementfunktionen eindimensionale Wavelets sind. Weiterhin gebe es $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass $\hat{\Phi}(\zeta)$ und $\hat{\Psi}(\zeta)$ positiv definit sind. Dann ist Ω mit $\Omega_{kl} := \Phi_{kl} \star \Psi_{kl}, 1 \leq k, l \leq n$ ein Matrixwavelet.*

BEWEIS Zunächst sind $\hat{\Phi}, \hat{\Psi}$ stetig und daher gibt es $\epsilon, \varepsilon > 0$, so dass $\hat{\Phi}$ positiv definit ist auf $U_\epsilon(\zeta)$ und $\hat{\Psi}$ definit ist auf $U_\varepsilon(\zeta)$, also sind $\hat{\Phi}$ und $\hat{\Psi}$ positiv definit auf $U_\eta(\zeta)$ mit $\eta := \min(\epsilon, \varepsilon)$. Weiterhin folgt aus der Definition von Ω , dass $\hat{\Omega}_{kl} = \hat{\Phi}_{kl} \cdot \hat{\Psi}_{kl} \forall k, l$. Ein solches elementweises Matrixprodukt wird als *Hadamard-Produkt* bezeichnet und hat besondere Eigenschaften. Nach [HJ85, Theorem 7.5.3] ist das Hadamard-Produkt zweier positiv definiter Matrizen wieder positiv definit und somit ist nach Voraussetzung $\hat{\Omega}$ positiv definit auf $U_\eta(\zeta)$. Die Existenz von C_Ω folgt nun mit Satz 22 und seine Invertierbarkeit analog zum Beweis von Satz 21. ■

5.4 Analytische Matrixwavelets

Definition 32 Ein n -dimensionales Matrixwavelet Ψ heißt *analytisch*, wenn seine Elementfunktionen analytisch sind.

Definition 33 Sei Ψ ein n -dimensionales analytisches Matrixwavelet, dessen Elementfunktionen alle die gleiche zentrale Frequenz η haben, dann heißt η die *zentrale Frequenz* von Ψ . Sind die zentralen Frequenzen der Elementfunktionen verschieden, so lässt sich eine gemeinsame zentrale Frequenz nicht sinnvoll definieren.

Lemma 11 Sei Ψ ein n -dimensionales Matrixwavelet mit zentraler Frequenz η , dessen Elementfunktionen durch $\Psi_{kl} := g_{kl}(t) \cdot e^{i\eta t}$, $1 \leq k, l \leq n$ definiert sind, wobei die g_{kl} Fensterfunktionen mit Träger $[-1/2, 1/2]$, und $\|g_{kl}\|_2 = 1$ sind. Sei außerdem $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $F_l(t) := a_k(t) \cos \phi(t)$, $1 \leq k \leq n$. Sind die Veränderungen aller $a_k(t)$ innerhalb der Träger aller Ψ_{kl} hinreichend klein, so gilt

$$(W_\Psi F(s, u))_k = \frac{\sqrt{s}}{2} \cdot e^{i\phi(u)} \cdot \left(\sum_{l=1}^n a_l(u) \cdot \hat{g}_{kl}(s(\xi - \phi'(u))) + \epsilon_k(u, \xi) \right)$$

BEWEIS Da die Elementfunktionen von Ψ selbst Wavelets sind, dürfen in der Transformation Summe und Integration vertauscht werden, und es ergibt sich

$$(W_\Psi F(s, u))_k = \sum_{l=1}^n W_{\Psi_{kl}} F_l(s, u). \quad (5.2)$$

Wie in Lemma 3 sind überdies alle g_{kl} näherungsweise analytische Wavelets, für die Formel 3.7 gilt, also

$$W_{\Psi_{kl}} F_l(s, u) = \frac{\sqrt{s}}{2} a_l(u) \cdot e^{i\phi(u)} \cdot (\hat{g}_{kl}(s(\xi - \phi'(u))) + \epsilon_{kl}(u, \xi)) \quad (5.3)$$

und mit $\epsilon_k(u, \xi) = \sum_{l=1}^n \epsilon_{kl}(u, \xi)$ liefert Einsetzen von 5.3 in 5.2 die Behauptung. ■

Definition 34 Das *Matrixskalogramm* einer vektorwertigen Funktion F ist definiert durch

$$\begin{aligned} P_W F(\xi, u) &:= (|WF(s, u)_1|^2, \dots, |WF(s, u)_n|^2)^T \\ &= \left(\left| WF\left(\frac{\eta}{\xi}, u\right)_1 \right|^2, \dots, \left| WF\left(\frac{\eta}{\xi}, u\right)_n \right|^2 \right)^T \end{aligned}$$

mit $\xi = \eta/s$ analog Lemma 1.

Definition 35 Analog dazu ist das *normalisierte Matrixskalogramm* einer vektorwertigen Funktion F definiert durch

$$\frac{\xi}{\eta} P_W F(\xi, u) = \frac{(|WF(s, u)_1|^2, \dots, |WF(s, u)_n|^2)^T}{s}, \quad \xi = \eta/s \text{ (wie oben).}$$

Korollar 12 Sei $p \in [1, \infty]$. Ist in Lemma 11 der Korrekturterm $\epsilon(u, \xi)$ vernachlässigbar, so liegen Maxima sowohl von $\left(\frac{\xi}{\eta} P_W F(\xi, u)\right)_k, k = 1, \dots, n$ als auch von $\left\|\frac{\xi}{\eta} P_W F(\xi, u)\right\|_p$ bei $(u, \phi'(u))$, also der jeweiligen Momentanfrequenz zum Zeitpunkt ihres Auftretens vor.

BEWEIS Da die Elementfunktionen von Ψ selbst Wavelets sind, dürfen in der Matrixwavelet-Transformation wieder Summe und Integral vertauscht werden. Nach Lemma 11 gilt für die einzelnen Komponenten

$$\begin{aligned} \left(\frac{\xi}{\eta} P_W F(\xi, u)\right)_k &= \frac{|WF(s, u)_k|^2}{s} \\ &\approx \frac{\left|\frac{\sqrt{s}}{2} \cdot e^{i\phi(u)} \cdot \sum_{l=1}^n a_l(u) \cdot \hat{g}_{kl}(s(\xi - \phi'(u)))\right|^2}{s} \\ &= \frac{|\sum_{l=1}^n a_l(u) \cdot \hat{g}_{kl}(s(\xi - \phi'(u)))|^2}{4} \end{aligned}$$

Nach den in Lemma 11 gegebenen Voraussetzungen sind die $\epsilon_k(u, \xi)$ vernachlässigbar, da es nach Lemma 3 bereits die ϵ_{kl} sind und $\epsilon_k(u, \xi) = \sum_{l=1}^n \epsilon_{kl}(u, \xi)$ gilt. Weiterhin haben alle $\hat{g}_{kl}(s(\xi - \phi'(u))) = \hat{g}_{kl}(s(\eta/s - \phi'(u)))$ ihren maximalen Betrag bei $\phi'(u) = \eta/s$, wenn also die *momentane* Frequenz der Signalkomponenten mit der *zentralen* Frequenz der skalierten Wavelets g_{kl} übereinstimmt und überdies ist $\forall k, l : \hat{g}_{kl}(0) > 0$. Nach Lemma 1 gibt es außerdem $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\zeta \in [u - \varepsilon, u + \varepsilon]$

$$a_l(u) \cdot \hat{g}_{kl}(s(\xi - \phi'(u))) \geq a_l(\zeta) \cdot \hat{g}_{kl}(s(\xi - \phi'(\zeta)))$$

gilt. Damit folgt die Behauptung für die einzelnen Komponenten und analog folgt die Behauptung für $\left\|\frac{\xi}{\eta} P_W F(\xi, u)\right\|_p$. ■

Kapitel 6

Inverse Transformationen

In diesem Kapitel wird zunächst ein Beweis für die „natürliche“ Inverse der Matrixwavelet-Transformation gegeben und danach werden weitere Formen der Zulässigkeit beleuchtet, die geringfügig andere Definitionen von C_Ψ und auch entsprechende Invertierungsformeln beinhalten. Dies führt dazu, dass unter Umständen die Invertierung direkt an ein gegebenes Problem angepasst und auch erheblich beschleunigt werden kann.

6.1 Die „natürliche“ inverse Transformation

Satz 26 *Sei Ψ ein vermöge Transposition zulässiges n -dimensionales Matrixwavelet und $f \in \mathcal{L}_2^n(\mathbb{C})$ und $g := W_\Psi f$, dann ist die Matrixwavelet-Transformation invertierbar und die Inversion ist gegeben durch die Gleichung*

$$W_\Psi^{-1}g = C_\Psi^{-1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}} \Psi^T \left(\frac{x - \tau}{\sigma} \right) g(\sigma, \tau) d\tau \frac{d\sigma}{\sigma^2},$$

mit C_Ψ wie in Definition 29.

BEWEIS Man betrachtet die Fouriertransformierte von g und erhält zunächst

$$\begin{aligned} g(s, \cdot)^\wedge(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\Psi} \left(\frac{\tau - t}{s} \right) f(\tau) d\tau \cdot e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{|s|}} \left(\overline{\Psi} \left(\frac{\cdot - t}{s} \right) \overline{*} f \right)^\wedge(\omega) \\ &= \frac{1}{\sqrt{|s|}} \widehat{\overline{\Psi}_{s,t}}(\omega) \cdot \hat{f}(\omega). \end{aligned}$$

Weiter folgt:

$$\begin{aligned}
& \left(C_{\Psi}^{-1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}} \Psi^T \left(\frac{x - \tau}{\sigma} \right) g(\sigma, \tau) d\tau \frac{d\sigma}{\sigma^2} \right)^{\wedge} \\
&= C_{\Psi}^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}} \Psi_{\sigma, \tau}^T \star g(\sigma, \tau) d\tau \frac{d\sigma}{\sigma^2} \right)^{\wedge} \\
&= C_{\Psi}^{-1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}} \widehat{\Psi_{\sigma, \tau}^T} \cdot \hat{g}(\sigma, \tau) d\tau \frac{d\sigma}{\sigma^2} \\
&= C_{\Psi}^{-1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}} \widehat{\Psi_{\sigma, \tau}^T}(\omega) \cdot \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}} \overline{\widehat{\Psi}_{s, t}}(\omega) \cdot \hat{f}(\omega) d\tau \frac{d\sigma}{\sigma^2} \\
&= C_{\Psi}^{-1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\sigma| \widehat{\Psi}^T(\omega - \tau) |\sigma| \overline{\widehat{\Psi}}(\omega - \tau) \frac{d\sigma}{\sigma^3} d\tau \cdot \hat{f}(\omega) \\
&= C_{\Psi}^{-1} C_{\Psi} \hat{f}(\omega). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

6.2 Zulässigkeit vermöge weiterer Operationen

6.2.1 Zulässigkeit vermöge Identität

Diese Bezeichnung trägt der Tatsache Rechnung, dass hier für die Bildung von C_{Ψ} keine Transposition, sondern nur eine komplexe Konjugation stattfindet. Das Matrixprodukt $\Psi \cdot \overline{\Psi}$ hat jedoch viel weniger angenehme Eigenschaften als $\overline{\Psi}^H \cdot \overline{\Psi} = \Psi^T \cdot \overline{\Psi}$, und so funktioniert zum Beispiel keines der „hermitesch und positiv definit“-Argumente, wenn nicht schon die Waveletmatrix an sich hermitesch besetzt ist. Da andererseits eine komplexe und strikt positiv definite Matrix M , die also $x^H A x > 0 \forall x \in \mathbb{C}$ erfüllt, notwendigerweise hermitesch ist [HJ85, Theorem 4.1.4], muss hier die Untersuchung in eine andere Richtung gehen, wenn weitergehende Erkenntnisse gewonnen werden sollen.

Das augenfälligste Merkmal eines Matrixprodukts vom Typ $\Psi \cdot \overline{\Psi}$ ist, dass es eine eventuelle Dreiecksstruktur der Matrix erhält, was sich natürlich auch auf die Zulässigkeitsmatrix überträgt, die sich in diesem Fall sehr einfach invertieren lässt, wofür dann wiederum brauchbare Fehlerabschätzungen existieren [GvL96]. Es bietet sich hier also eine Möglichkeit, fast die Hälfte der Rechenzeit für die Invertierung einzusparen, wenn die jeweilige Anwendung zu einer entsprechenden Struktur der Matrix führt.

Definition 36 Sei zu $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion Ψ in $\mathcal{L}_2^{n \times n}(\mathbb{C})$ gegeben, dann heißt die Matrix definiert durch

$$C_\Psi := \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{\Psi}(\omega) \overline{\hat{\Psi}(\omega)}}{|\omega|} d\omega$$

die *Zulässigkeitsmatrix vermöge Identität* zu Ψ . Existiert dieses C_Ψ in dem Sinn, dass seine Elemente endlich sind und ist es zudem invertierbar, dann heißt Ψ *zulässig vermöge Identität* und wird auch als (n - dimensionales) *Matrixwavelet vermöge Identität* bezeichnet.

Hinsichtlich der Existenz der Einträge gilt insbesondere wieder Satz 22, der die Existenz für den Fall sichert, dass die Elementfunktionen skalare Wavelets sind.

Satz 27 Sei Ψ ein n -dimensionales Matrixwavelet vermöge Identität, $f \in \mathcal{L}_2^n(\mathbb{C})$ und $g := W_\Psi f$, dann ist die Matrixwavelet-Transformation invertierbar und die Inversion ist gegeben durch die Gleichung

$$W_\Psi^{-1} g = C_\Psi^{-1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}} \Psi\left(\frac{x - \tau}{\sigma}\right) g(\sigma, \tau) d\tau \frac{d\sigma}{\sigma^2}.$$

BEWEIS Analog zum Beweis von Satz 26. ■

Bei Matrixwavelets mit Dreiecksstruktur ist die Invertierbarkeit von C_Ψ anhand des folgenden Satzes sehr leicht zu überprüfen.

Satz 28 Sei Ψ ein n -dimensionales Matrixwavelet, dessen Elementfunktionen auf der Diagonalen selbst Wavelets sowie entweder ober- oder unterhalb der Diagonalen identisch 0 sind, so ist Ψ invertierbar vermöge Identität.

BEWEIS Die Elementfunktionen von Ψ seien oBdA unterhalb der Diagonalen identisch 0. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& (C_\Psi)_{k,k} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{\begin{pmatrix} \hat{\psi}_{1,1}(\omega) & \dots & \hat{\psi}_{1,n}(\omega) \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \hat{\psi}_{n,n}(\omega) \end{pmatrix}_{k,\cdot} \times \overline{\begin{pmatrix} \hat{\psi}_{1,1}(\omega) & \dots & \hat{\psi}_{1,n}(\omega) \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \hat{\psi}_{n,n}(\omega) \end{pmatrix}_{\cdot,k}}}{|\omega|} d\omega \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{\begin{pmatrix} \overbrace{0}^{k\text{-mal}} & \hat{\psi}_{k,k}(\omega) & \dots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vdots \\ \hat{\psi}_{k,k}(\omega) \\ \underbrace{0}_{n-k \text{ mal}} \end{pmatrix}_{\cdot,k}}{|\omega|} \\
&= \begin{pmatrix} c_{\psi_{1,1}} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & c_{\psi_{n,n}} \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Damit sind alle Diagonalelemente von C_Ψ von 0 verschieden und C_Ψ ist invertierbar. ■

Weitere interessante Anwendungen könnten sich aus der Konstruktion eines Matrixwavelets aus einem skalaren Wavelet mit einer Gewichtungsmatrix Z mit $Z \cdot \bar{Z} = \mathbb{I}_n$ ergeben. Solche Matrizen heißen *zirkulär*, lassen sich immer in der Form $Z = e^{iR}$, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ darstellen [MM92, 4.19.7] und ergeben sich zum Beispiel bei einer speziellen Form der polaren Zerlegung [Bha94, Abschnitt 3.7].

6.2.2 Schnelle Invertierung

Dass die Abkehr vom kanonischen inneren Produkt $\Psi^H \cdot \Psi$ auszahlt zeigt insbesondere dieser Abschnitt.

Offensichtlich ist, wie schon bei der skalaren Wavelettransformation, (s. Bemerkung 5) auch im Matrixfall die Synthese grundsätzlich mit einem anderen Wavelet als bei der Analyse möglich, jedoch mit zwei wesentlichen Unterschieden:

1. Die anderen Wavelets ergeben sich ganz natürlich aus Matrixoperationen.
2. Was im skalaren Fall auf den ersten Blick nur eine nette Spielerei war spart jetzt viel Rechenzeit.

Definition 37 Zu $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sei die Funktion $\text{diag}(M)$ durch

$$\text{diag}(M) := \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & m_{nn} \end{pmatrix}$$

definiert.

Definition 38 Sei zu $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $\Psi \in \mathcal{L}_2^{n \times n}$ gegeben, dann heißt die Matrix definiert durch

$$C_\Psi := \int_{\mathbb{R}} \frac{\text{diag}(\hat{\Psi}(\omega)) \cdot \overline{\hat{\Psi}}(\omega)}{|\omega|} d\omega$$

die *Zulässigkeitsmatrix vermöge Diagonalisierung* zu Ψ . Existiert dieses C_Ψ in dem Sinn, dass seine Elemente endlich sind und ist es zudem invertierbar, dann heißt Ψ *zulässig vermöge Diagonalisierung* und wird auch als (n -dimensionales) *Matrixwavelet vermöge Diagonalisierung* bezeichnet.

Auch hier wird die Existenz von C_Ψ durch Satz 22 sichergestellt, falls Ψ mit skalaren Wavelets besetzt ist.

Die Invertierbarkeit wird in diesem Fall zum Beispiel schon durch Diagonaldominanz von Ψ gesichert.

Satz 29 Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\Psi \in \mathcal{L}_2^{n \times n}(\mathbb{C})$. Ist $\hat{\Psi}(\omega)$ *diagonaldominant nach Zeilen* für alle $\omega \in \mathbb{R}$, so ist C_Ψ , falls es existiert, auch invertierbar.

BEWEIS Unter den gegebenen Voraussetzungen gilt

$$\begin{aligned} & \text{diag}(\hat{\Psi}(\omega)) \cdot \overline{\hat{\Psi}}(\omega) \\ &= \begin{pmatrix} \hat{\psi}_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \hat{\psi}_{n,n} \end{pmatrix} \times \overline{\begin{pmatrix} \hat{\psi}_{1,1} & \hat{\psi}_{1,2} & \dots & \hat{\psi}_{1,n} \\ \hat{\psi}_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \hat{\psi}_{n-1,n} \\ \hat{\psi}_{n,1} & \dots & \hat{\psi}_{n,n-1} & \hat{\psi}_{n,n} \end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} \hat{\psi}_{1,1} \overline{\hat{\psi}_{1,1}} & \hat{\psi}_{1,1} \overline{\hat{\psi}_{1,2}} & \dots & \hat{\psi}_{1,1} \overline{\hat{\psi}_{1,n}} \\ \hat{\psi}_{2,2} \overline{\hat{\psi}_{2,1}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \hat{\psi}_{n-1,n-1} \overline{\hat{\psi}_{n-1,n}} \\ \hat{\psi}_{n,n} \overline{\hat{\psi}_{n,1}} & \dots & \hat{\psi}_{n,n} \overline{\hat{\psi}_{n,n-1}} & \hat{\psi}_{n,n} \overline{\hat{\psi}_{n,n}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da also jede Zeile mit einem festen Faktor multipliziert wird, bleibt die Diagonaldominanz nach Zeilen erhalten, woraus direkt die Invertierbarkeit folgt. ■

Satz 30 Sei Ψ ein n -dimensionales Matrixwavelet vermöge Diagonalisierung, $f \in \mathcal{L}_2^n$ und $g := W_\Psi f$, dann ist die Matrixwavelet-Transformation invertierbar und die Inversion ist gegeben durch die Gleichung

$$W_\Psi^{-1}g = C_\Psi^{-1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}} \operatorname{diag} \left(\Psi \left(\frac{x - \tau}{\sigma} \right) \right) g(\sigma, \tau) d\tau \frac{d\sigma}{\sigma^2}.$$

BEWEIS Analog zum Beweis von Satz 26.

Durch die Diagonalgestalt des Invertierungswavelets wird somit die Berechnung eines richtigen Matrixprodukts überflüssig und die Berechnung geht erheblich schneller vonstatten. Analog zu Bemerkung 6 im skalaren Fall ist es natürlich auch im Matrixfall möglich, für die Rücktransformation eine Funktion $\Delta(t) := \mathbb{I}_n \cdot \delta(t)$ zu benutzen und sich somit jegliche Faltungsoperation für die Invertierung zu ersparen, was zu einer weiteren Beschleunigung führt. Der Beweis läuft völlig analog zu den vorigen Sätzen.

Der Preis für die steigende Geschwindigkeit ist jedoch eine zunehmende Instabilität, die sich zum einen in der Konditionszahl der Zulässigkeitsmatrizen, zum anderen in der Qualität der Rücktransformation deutlich niederschlägt, wie Kapitel 6 zeigen wird.

6.2.3 Zulässigkeit vermöge anderer Operatoren

Natürlich lässt sich auch die Zulässigkeit vermöge beliebiger anderer Operatoren T definieren, wobei dann das obige Schema fortgesetzt wird und die allgemeine Zulässigkeitsmatrix die Gestalt

$$C_{T,\Psi} := \int_{\mathbb{R}} \frac{T \left(\hat{\Psi}(\omega) \right) \overline{\hat{\Psi}}(\omega)}{|\omega|} d\omega$$

hat, mit der entsprechenden Inversen

$$W_{T,\Psi}^{-1}g = C_{T,\Psi}^{-1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}} T \left(\Psi \left(\frac{x - \tau}{\sigma} \right) \right) g(\sigma, \tau) d\tau \frac{d\sigma}{\sigma^2}.$$

Der entsprechende Existenzbeweis läuft schematisch immer nach dem gleichen Muster ab. Falls es also einen zum jeweiligen Problem passenden Matrixoperator T gibt, der die Invertierung auf eine besondere Weise beschleunigt, stabilisiert oder in sonstiger Hinsicht positiv beeinflusst, so gibt es das zugehörige $C_{T,\Psi}$ und die Inverse $W_{T,\Psi}^{-1}$ fast geschenkt und zwar *ganz ohne Neuberechnung der Transformierten* selbst.

Kapitel 7

Konstruktion von Matrixwavelets

Allein die Möglichkeit, die Elementfunktionen eines Matrixwavelets mit beliebigen eindimensionalen Wavelets zu besetzen, führt zu einer reichhaltigen Auswahl an Matrixwavelets. Die Voraussetzungen für die Existenz und Invertierbarkeit der Zulässigkeitsmatrix sind dabei schwach:

- Die Existenz der Zulässigkeitsmatrix wird von Satz 22 garantiert,
- ihre Invertierbarkeit kann man immer erzwingen, solange man nur dafür sorgt, dass die Spektren aller Elementfunktionen in der Umgebung wenigstens eines $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig sind und durch Skalierung dafür sorgt, dass dort Diagonaldominanz eintritt.

Trotzdem bleibt die Frage nach einer wirklich *geschickten* Besetzung der Matrix. Je nach Problemstellung können ganz verschiedene Ansätze in Frage kommen:

1. Für die Analyse von Daten, die aus Messungen gewonnen wurden, kann es wünschenswert sein, die Topologie der Messpunkte in die Matrix mit einfließen zu lassen,
2. für die Analyse von abstrakten Problemen könnte eine geeignete Zerlegung einer matrixwertigen Funktion [DE99] hilfreich sein,
3. letztlich ist es denkbar, die einzelnen Elementfunktionen sozusagen „von Hand“ an das vorliegende Problem anzupassen.

Da in dieser Arbeit die Analyse von Messdaten im Vordergrund steht, soll vor allem Punkt 1 näher untersucht werden.

7.1 Topologisch angepasste Matrixwavelets

Für die Konstruktion von Matrixwavelets, die an die Topologie einer Messpunktanordnung angepasst sind, bieten sich zwei verschiedene Wege an:

- Die Konstruktion ausgehend von einem *einzigsten* eindimensionalen Wavelet, dessen Lage in Zeit und Phase an die Topologie angepasst wird.
- Die Konstruktion ausgehend von *mehreren* eindimensionalen Wavelets, die passend zur Topologie ausgewählt oder konstruiert werden.

Eine wichtige Rolle werden dabei die so genannten Distanzmatrizen [Bax91] spielen. Als Einstieg in das Thema mag das folgende anschauliche Beispiel dienen:

7.1.1 Konstruktionen aus einem einzigen Wavelet

7.1.1.1 Äquidistante kollineare Messpunkte bei isotroper Signalausbreitung

Sei die Situation aus Abbildung 7.1 gegeben, in der drei äquidistant in einer Reihe liegende Detektoren D, E und F Signale von einer Quelle empfangen, die sich auf einem im Verhältnis zum Abstand der Detektoren untereinander sehr großen Kreis mit Radius r um den Mittelpunkt der Detektorreihe befindet. Wenn das Trägermedium eine isotrope – also in alle Richtungen gleichmäßig radiale – Signalausbreitung erlaubt, so werden die Signale einer Quelle in Position P zuerst beim Detektor D eintreffen, danach mit einer gewissen Zeitdifferenz d beim Detektor E und mit einer Zeitdifferenz von $2d$ beim Detektor F. Wenn zusätzlich r groß genug ist, um die Krümmung der Wellenfront¹ vernachlässigen zu können – die Ausbreitung entspricht dann annähernd der einer linearen Wellenfront – so werden Signale einer Quelle in Position Q mit vernachlässigbarer Zeitverzögerung, also quasi gleichzeitig bei allen Detektoren eintreffen. Unter diesen Voraussetzungen wird die Zeitdifferenz d des Eintreffens bei den Detektoren nur von der Ausbreitungsgeschwindigkeit v des Signals im Medium, dem Abstand benachbarter Detektoren (die man beide oBdA als 1 annehmen kann) und der Ausbreitungsrichtung, repräsentiert durch den Winkel φ , bestimmt. Eine einfache Rechnung anhand Abbildung 7.2 ergibt unter diesen Umständen $d = \sin \varphi$.

Aus Abschnitt C.3 entnimmt man, dass eine Zeitverschiebung der Signale um die Zeit d eine frequenzabhängige Phasenverschiebung ihres Spektrums

¹Der Begriff Wellenfront wird hier im anschaulichen und *nicht* im funktionalanalytischen Sinn gebraucht.

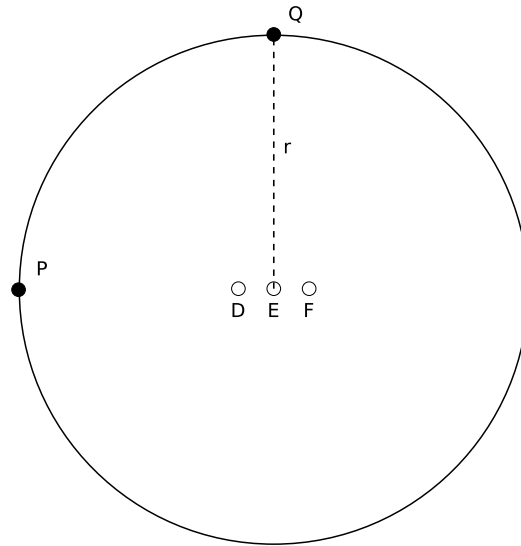


Abbildung 7.1: Situation mit zwei Positionen P und Q für eine Signalquelle, sowie drei Detektoren D, E und F.

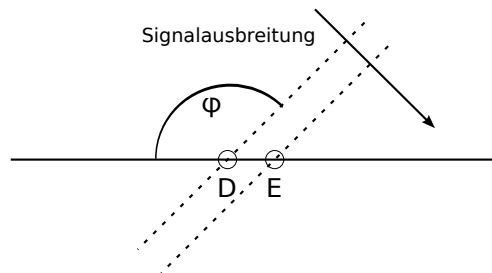


Abbildung 7.2: Eine Wellenfront, die sich parallel ausbreitet. Die Zeitdifferenz ihres Eintreffens bei den Detektoren D und E hängt nur noch vom Winkel φ ab, wenn man Detektorabstand und Ausbreitungsgeschwindigkeit zu 1 normiert. Für die Position P aus Abbildung 7.1 ergibt sich $\varphi = \pi/2$, also 90° und für die Position Q ergibt sich $\varphi = \pi$, also 180° .

um den Faktor $e^{-i\omega d}$ zur Folge hat. Diese kann nun benutzt werden, um die Waveletmatrix im Spektralbereich zu konstruieren:

Zur gegebenen Situation passt natürlich nur eine 3×3 -Matrix $\mathring{\Psi}$, die zeilenweise mit Termen besetzt wird, die dieser Phasenverschiebung *entsprechen*. Für die Wavelettransformation, die auf dem $\bar{*}$ -Operator beruht, bedeutet dies nach Formel 2.3, dass sich wegen der Konjugation des Waveletspektrums im Fourierbereich diese Phasenverschiebungen *umkehren* und über die punktweise Multiplikation mit dem Signalspektrum die Phasenverschiebungen der Signale gerade *kompensieren*.

$\mathring{\Psi}$ sieht also folgendermaßen aus:

Zeile 1: Hier wird die Situation erfasst, dass die Signalquelle in Position Q steht; alle Phasenverschiebungen sind 0 und daher lautet diese Zeile $(1, 1, 1)$.

Zeile 3: Hier wird die Situation erfasst, dass die Signalquelle in Position P steht; alle Phasenverschiebungen sind nun maximal, nämlich 0, $e^{-i\omega d}$ und $e^{-i\omega 2d}$, was auch gerade den Einträgen $(1, e^{-i\omega d}, e^{-i\omega 2d})$ entspricht.

Zeile 2: Diese Zeile könnte für irgendeine Zwischenposition stehen, aber die Wahl der Faktoren $(1, e^{-i\omega d/2}, e^{-i\omega d})$ erweist sich als theoretischer Vorteil, denn dann gilt:

Sei $e_k := e^{-ik\omega d/2}$, $k = 0, 1, 2$, dann kann man $\mathring{\Psi}$ schreiben wie folgt:

$$\mathring{\Psi}(\omega, d) = \begin{pmatrix} e_0^0 & e_1^0 & e_2^0 \\ e_0^1 & e_1^1 & e_2^1 \\ e_0^2 & e_1^2 & e_2^2 \end{pmatrix},$$

also ist $\mathring{\Psi}(\omega, d)$ die Vandermonde-Matrix zum Vektor (e_1, e_2, e_3) , die für paarweise verschiedene e_k grundsätzlich invertierbar ist [Gau78]. Natürlich funktioniert dieses Verfahren auch für jede beliebige größere Anzahl n von Detektoren: Man bestimmt zunächst die maximal möglichen Phasenverschiebungen $\mathring{\Psi}_{nl}(\omega, d)$, trägt diese in der letzten Zeile von $\mathring{\Psi}(\omega, d)$ ein und errechnet das Element $\mathring{\Psi}_{kl}$ zu $\mathring{\Psi}_{kl} = \left(\sqrt[n-1]{\mathring{\Psi}_{nl}} \right)^{k-1} = e^{-i\omega(k-1)(l-1)d/(n-1)}$. Diese Matrix aus Funktionen zur Phasenkorrektur muss nun nur noch mit dem Spektrum eines skalaren Wavelets multipliziert werden, um ein Matrixwavelet zu erhalten, und es gilt der folgende Satz:

Satz 31 Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $\psi \in \mathcal{L}_1$ irgendein Wavelet. Seien weiterhin paarweise verschiedene $e_k := e^{-i\omega d_k}$, $d_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$ gegeben, dann ist die Funktion Ψ definiert durch

$$\Psi := \left(\hat{\psi}(\omega) \cdot \text{vander}(e_1, \dots, e_n) \right)^\vee$$

ein Matrixwavelet.

BEWEIS Zu zeigen ist die Zulässigkeit von Ψ . Da ψ selbst ein Wavelet ist, existiert C_Ψ nach Bemerkung 9 auf jeden Fall. Da die e_k periodische Funktionen sind, ist die Invertierbarkeit von vander (e_1, \dots, e_k) nicht zwangsläufig für alle ω sichergestellt, wegen ihrer Stetigkeit und der von $\hat{\psi}$ ist aber $\hat{\Psi}^T \hat{\Psi}$ auf einer Menge M positiv definit und invertierbar, also sogar strikt positiv definit, die keine Nullmenge ist. Für einen beliebigen Vektor $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ folgt nun:

$$\begin{aligned}
v^H C_\Psi v &= v^H \left(\int_M \frac{\hat{\Psi}^T(\omega) \overline{\hat{\Psi}}(\omega)}{|\omega|} d\omega + \int_{\mathbb{R} \setminus M} \frac{\hat{\Psi}^T(\omega) \overline{\hat{\Psi}}(\omega)}{|\omega|} d\omega \right) v \\
&= v^H \int_M \frac{\hat{\Psi}^T(\omega) \overline{\hat{\Psi}}(\omega)}{|\omega|} d\omega v + v^H \int_{\mathbb{R} \setminus M} \frac{\hat{\Psi}^T(\omega) \overline{\hat{\Psi}}(\omega)}{|\omega|} d\omega v \\
&\geq v^H \int_M \frac{\hat{\Psi}^T(\omega) \overline{\hat{\Psi}}(\omega)}{|\omega|} d\omega v \\
&= \int_M \frac{v^H \hat{\Psi}^T(\omega) \overline{\hat{\Psi}}(\omega) v}{|\omega|} d\omega > 0 \quad .
\end{aligned}$$

Damit ist auch C_Ψ strikt positiv definit und mithin invertierbar. ■

Verwendet man ein *analytisches* Wavelet, so kann man zum Beispiel in der Situation aus Abbildung 7.1 mit Hilfe von Korollar 1 auf den Einfallswinkel der Wellenfront schließen:

- Seien oBdA der Abstand benachbarter Detektoren und die Ausbreitungsgeschwindigkeit auf 1 normiert.
- Da ψ ein Wavelet ist, kann man Integration und Summenbildung gemäß Gleichung 5.1 vertauschen.
- Die Signalquelle befinde sich irgendwo auf dem *oberen* Halbkreis und sende ein Signal f mit einer nur kurz auftretenden und genügend hohen Momentanfrequenz ω_M dergestalt aus, dass $|W_\psi f(s, \cdot)|^2$ genau ein isoliertes globales Maximum bei der Skala s_M hat, womit nach Bemerkung 2 eine genaue Zeitbestimmung möglich wird.

Unter diesen Umständen ergeben sich folgende Konsequenzen:

1. Liegen die Zeitpunkte des Eintreffens bei den n Detektoren weit genug auseinander, so hat $|(W_\psi f(s_M, \cdot))_1|^2$ nach Korollar 1 genau n lokale Maxima bei der der Momentanfrequenz entsprechenden Skala. Der

zeitliche Abstand dieser Maxima entspricht dem zeitlichen Abstand des Eintreffens des Signals bei den Detektoren, woraus mit gängigen Triangulationsmethoden (siehe z.B. [GG] oder [BM02]) auf die Lage der Signalquelle geschlossen werden kann.²

2. Bei n äquidistanten Detektoren und Verwendung einer Vandermonde-Matrix von Einheitswurzeln, ergibt sich dass $|W_\Psi f(s_M, \cdot)|_n^2$ nach Konstruktion genau dann sein globales Maximum annimmt, wenn das Signal mit maximaler Phasendifferenz bei den Detektoren eintrifft, also wenn $\varphi = 90^\circ$ oder $\varphi = 270^\circ$. Im ersten Fall tritt das Maximum bei der Skala s_M auf, im zweiten Fall kehrt sich die Zeitrichtung um, was einem Maximum bei der Skala $-s_M$ entspricht. Analog hat $|W_\Psi f(-s_M, \cdot)|_1^2$ ein globales Maximum bei $\varphi_n = 180^\circ$.
3. Für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ gibt es ein bestimmtes φ_k , so dass die lokalen Maxima der Komponente $|(W_\psi f(s_M, \cdot))_k|^2$ zu einem globalen Maximum verschmelzen, nämlich dann, wenn die Terme aus der Vandermonde-Matrix gerade den Phasenverschiebungen durch die Zeitdifferenz entsprechen, wenn also

$$\begin{aligned} (\text{vander}(e_1, \dots, e_n))_{k.} &= (e^{-i\omega(k-1)0/(n-1)}, \dots, e^{-i\omega(k-1)(n-1)/(n-1)}) \\ &= (e^{-i\omega \cdot 0 \sin \varphi_k}, \dots, e^{-i\omega \cdot (n-1) \sin \varphi_k}) \end{aligned}$$

gilt, was wiederum auf $\varphi_k = \pi - \arcsin\left(\frac{k-1}{n-1}\right)$ zurückführt.

Die Detektoren müssen natürlich nicht unbedingt äquidistant verteilt sein. Hat man zum Beispiel eine lineare Anordnung von vier Sensoren bei den Positionen 0, 1, 4 und 6, so kommen darin bereits die Abstände $1 = 1 - 0$, $2 = 6 - 4$, $3 = 4 - 1$, $4 = 4 - 0$, $5 = 6 - 1$ und $6 = 6 - 0$ vor, denen sich wie oben Einfallswinkel zuordnen lassen, die zu lokalen Maxima in einer Komponente der Matrixwavelet-Transformation führen. Man nennt eine solche Anordnung ein *Golomb-Lineal*. Eine Diskussion der sich dadurch ergebenden Möglichkeiten würde an dieser Stelle zu weit führen, daher sei hier auf die entsprechende Literatur, zum Beispiel [Dim02] verwiesen.

Die Topologie linear angeordneter Messpunkte – selbst wenn sie nicht äquidistant sind – lässt sich somit über einen einfachen Ansatz zur Konstruktion von Matrixwavelets nutzen, und zwar mit der schönen Eigenschaft, dass die Eigenschaften von Maxima in den einzelnen Komponenten der Matrixwavelet-Transformierten auf natürliche Weise mit Eigenschaften des Signals verknüpft sind.

²Allerdings ist eine lineare Anordnung der Detektoren für Triangulationsmethoden nicht unbedingt optimal.

7.1.1.2 Zeitversatz versus Phasenversatz

Im vorigen Kapitel wurde in Formel 5.1 schon angesprochen, dass unter gewissen Umständen die Integration und die Summenbildung in der Matrix-wavelet-Transformation vertauscht werden können, so dass diese letztendlich eine Überlagerung der einzelnen Wavelettransformierten der analysierten Signale ist. Insbesondere ist dies natürlich dann der Fall, wenn es sich bei allen Elementfunktionen schon um Wavelets handelt. Diese Tatsache führt zu einer Situation, in der der oben beschriebene Ansatz, der auf dem Konzept der Gleichzeitigkeit beruht, versagen kann, denn er stellt speziell auf Phasenverschiebungen ab, wie sie durch Laufzeitunterschiede verursacht werden. Tatsächlich können natürlich auch ganz andere Phasenverschiebungen auftreten und es ist insbesondere möglich, dass diese so auftreten, dass sich die Wavelettransformierten der einzelnen Signale zu analytischen Wavelets auslöschten, statt zu dem gewünschten Maximum zu führen³. Dieser Effekt wird in Abbildung 7.3 gezeigt, wo drei kurze sinusförmige Signale zwar gleichzeitig, mit gleicher Momentanfrequenz und konstanter Phasendifferenz auftreten, aber diese Phasendifferenz letztlich dazu führt, dass in der Summe der Wavelettransformierten nichts mehr zu sehen ist.

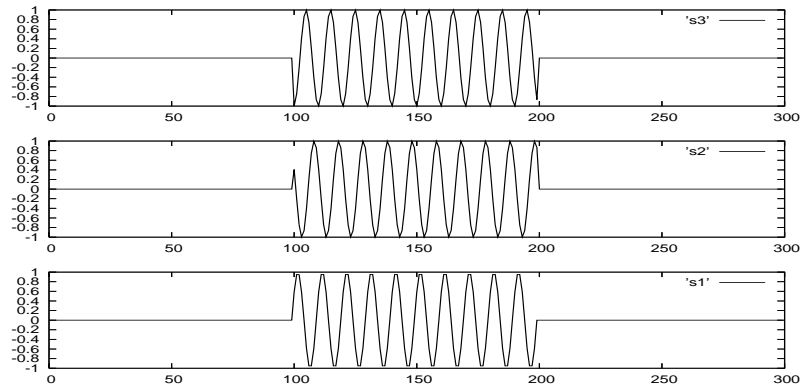
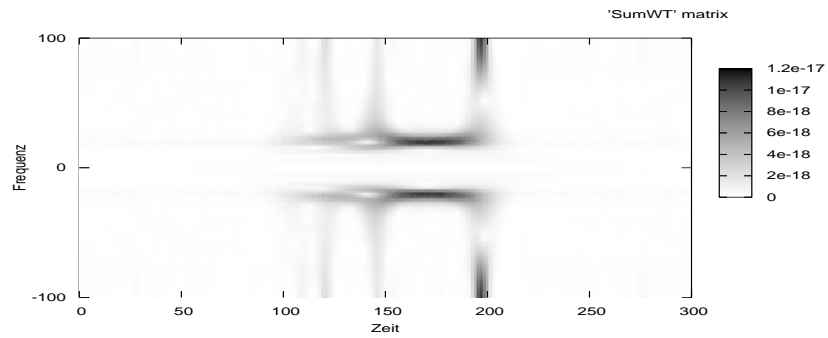
Dabei ist das Feststellen solcher Effekte durchaus von Interesse; die gesamte klassische Kohärenzanalyse zielt zum Beispiel darauf ab. Die Situation in der Abbildung lässt sich einfach dadurch bereinigen, dass das zur Analyse des jeweiligen Signals benutzte Wavelet einer Phasenverschiebung ϕ unterworfen wird, indem man einfach sein Spektrum, beziehungsweise es selbst, mit einem entsprechenden Faktor $e^{i2\pi\phi}$ multipliziert.

Das Ziel ist also, eine Matrix von Phasenkorrekturen so zu konstruieren, dass eine Chance besteht, zum einen solche Zusammenhänge aufzudecken und zum anderen ein Matrixwavelet konstruieren zu können, wozu diese Matrix insbesondere *invertierbar* sein muss.

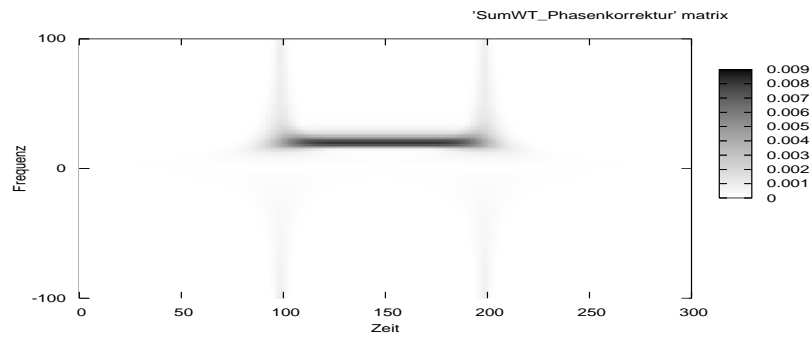
7.1.1.3 Kompliziertere Anordnungen von Messpunkten

Im vorigen Abschnitt spielte der Abstand zwischen den Messpunkten eine wichtige Rolle, da er im Zusammenhang mit der Signalausbreitungsgeschwindigkeit die Phasenverschiebungen der einzelnen Frequenzanteile bestimmt. Dies ist natürlich nur dann relevant, wenn die Abstände zwischen den Messpunkten im Verhältnis zur Signalausbreitungsgeschwindigkeit groß genug sind, um überhaupt signifikante Phasenverschiebungen zu bewirken.

³Da die Wavelettransformation linear ist bedeutet dies natürlich, dass sich auch die Signale selbst bei Überlagerung auslöschten.

(a) Drei Signale mit Phasen $2/3 \cdot 2\pi$, $1/3 \cdot 2\pi$, $0/3 \cdot 2\pi$.

(b) Die Summe ihrer Wavelettransformierten ist überall fast 0.



(c) Die Summe ihrer Wavelettransformierten mit Phasenkorrektur.

Abbildung 7.3: Ein Beispiel, in dem die ungünstige Phasenlage von an sich kohärenten Signalen die Aufdeckung der Gleichzeitigkeit zerstört. Eine Phasenkorrektur der komplexen Wavelets behebt das Problem.

Für die Analyse sich langsam ändernder elektrischer Felder oder Lichtsignale haben solche Überlegungen jedoch keine Bedeutung, denn hier werden Signale gemessen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten und Phasenverschiebungen in der Messung können deswegen *nicht* durch die Anordnung der Messpunkte bedingt sein. Es reicht daher zunächst, die Verhältnisse der Amplituden zu betrachten, die von der Geometrie der auf zwei Arten abhängen können:

1. Bei einer Signalausbreitung in einem absorbierenden Medium (zum Beispiel Röntgenstrahlen in Gewebe) tritt eine Amplitudendämpfung ein, die auf der Umwandlung von Strahlungsenergie in andere Energieformen, hauptsächlich Wärme, basiert und *exponentiell* vom Abstand zur Quelle abhängt.
2. Bei einer Signalausbreitung in einem durchlässigen Medium (zum Beispiel Licht im Vakuum oder auf kurze Distanzen in der Atmosphäre) tritt eine Amplitudendämpfung ein, die jedoch lediglich darauf beruht, dass sich dieselbe Menge an Energie auf eine größere (Kugel)oberfläche verteilt. Sie hängt deswegen *quadratisch* vom Abstand zur Quelle ab.

Diese Fälle lassen sich leicht durch Verwendung von Distanzmatrizen modellieren.

Definition 39 Seien zu $d, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, paarweise verschiedene Punkte $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ und $p \in (1, 2]$ gegeben, dann heißt die Matrix $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit den Einträgen $D_{kl} := \|x_k - x_l\|_p$ die *Distanzmatrix* zu diesen Punkten.

Die Diagonaleinträge einer beliebigen Distanzmatrix sind notwendigerweise 0 und die Matrix selbst ist symmetrisch. Für den Fall der euklidischen Norm lassen sich in der Literatur leicht Methoden finden, die zu den oben beschriebenen Dämpfungsmechanismen *invertierbare* Matrizen aus der Distanzmatrix konstruieren:

Definition 40 [Bax91, S. 432] Eine Funktion $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ heißt *strikt positiv definit*, wenn für beliebige $d, n \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedene Punkte $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ gilt, dass die Matrix $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$D_{kl} := g \left(\underbrace{\|x_k - x_l\|_2^2}_{=t} \right), 1 \leq k, l \leq n$$

strikt positiv definit ist.

Lemma 12 [Bax91, S. 432] Die Funktion $g(t) := e^{-t}$ ist strikt positiv definit.

Diese Aussage lässt sich abseits von Distanzmatrizen noch etwas anders formulieren, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 13 Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch und $x^H A x > 0$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$ mit $\sum_k x_k = 0$, dann ist die Matrix $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $E_{kl} = e^{A_{kl}}$ positiv definit.

BEWEIS Der erste Teil des Beweises findet sich auch in [HJ91, Theorem 6.3.6] und ist hier nur der Vollständigkeit halber angegeben, um die Idee dahinter zu erläutern, nämlich aus der fast positiv definiten Matrix A eine positiv definite Matrix B zu konstruieren, die dann zum gewünschten Resultat führt.

Sei dazu zunächst $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{C}^n$. Dann ist

$$e^H e = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

und für beliebiges $x \in \mathbb{C}^n$ gilt, dass der Vektor $\hat{x} := x - \frac{1}{n} \cdot e^H e x$, also das von seinem Mittelwert befreite x , die Eigenschaft $\sum_k \hat{x}_k = 0$ hat.

Es folgt dann für alle $x \in \mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned} 0 &< \hat{x}^H A \hat{x} \\ &= \left(x - \frac{1}{n} \cdot e^H e x \right)^H A \left(x - \frac{1}{n} \cdot e^H e x \right) \\ &= x^H \left(\mathbb{I}_n - \frac{1}{n} e^H e \right)^H A \left(\mathbb{I}_n - \frac{1}{n} e^H e \right) x \\ &= x^H \left(\mathbb{I}_n - \frac{1}{n} e^H e \right)^H \left(A - \frac{1}{n} A (e^H e) \right) x \\ &= x^H \underbrace{\left(A - \frac{1}{n} \cdot A (e^H e) - \frac{1}{n} \cdot (e^H e) A + \left(\frac{1}{n} \right)^2 (e^H e) A (e^H e) \right)}_{=: B} x. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist B strikt positiv definit.

Mit $y := \frac{1}{n} \cdot A e^H - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \right)^2 (e^H e) A e^H$ folgt durch einfaches Einsetzen, dass $A = B + y e + e^H y^H$ und damit auch B wieder hermitesch ist. Insbesondere gilt also $A_{kl} = B_{kl} + y_k + \bar{y}_l$. Dann ist jedoch $E_{kl} = e^{A_{kl}} = e^{B_{kl} + y_k + \bar{y}_l} = e^{B_{kl}} e^{y_k} e^{\bar{y}_l}$

und für alle $z \in \mathbb{C}^n$ folgt mit den Ausführungen in [HJ91, S. 449f.], dass

$$\begin{aligned}
z^H E z &= \sum_{k=1}^n ((z^H)_k (Ez)_k) \\
&= \sum_{k=1}^n \left((z^H)_k \sum_{l=1}^n E_{kl} z_l \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \left((z^H)_k \sum_{l=1}^n e^{B_{kl}} e^{y_k} e^{\overline{y_l}} z_l \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n ((z^H)_k e^{y_k} e^{B_{kl}} e^{\overline{y_l}} z_l) \\
&= \tilde{z}^H [e^{B_{kl}}]_{k,l=1}^n \tilde{z} \\
&> 0,
\end{aligned}$$

da B strikt positiv definit ist. ■

Lemma 14 [Mic86, Formel (4.1)] Die Funktion $g(t) := (r^2 + t)^{-\alpha}$ ist strikt positiv definit für alle $r \geq 0, \alpha > 0$.

Allerdings hat schon die Distanzmatrix selbst einige angenehme Eigenschaften, so dass sie im Zweifelsfall auch direkter für die Konstruktion von Matrixwavelets benutzt werden kann:

Lemma 15 [Bax91, Theorem 2.11, Example 2.3] Für die oben definierte Distanzmatrix gilt

$$(-1)^{n-1} \det D > 0,$$

sowie für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\sum_k y_k = 0$

$$y^T D y < 0.$$

Jedes der obigen Lemmata erlaubt es, aus einer Distanzmatrix eine neue Matrix M zu schaffen, die ihrerseits zumindest invertierbar ist. Es liegt daher nahe, aus diesen Matrizen direkt Matrixwavelets zu konstruieren, indem man von einem *einzigen* eindimensionalen Wavelet ψ ausgeht und $\Psi := (\hat{\psi} \cdot M)^\vee$ bildet, womit M zu einer Gewichtungsmatrix wird. Da ψ ein Wavelet ist, folgt die Existenz der Einträge von $C_\Psi = \int_{\mathbb{R}} \hat{\Psi}^T(\omega) \overline{\hat{\Psi}}(\omega) / |\omega| d\omega$ aus Satz 22 und die Invertierbarkeit von C_Ψ ist gewährleistet, da unter dem Integral ausschließlich strikt positiv definite Matrizen stehen. Die Punkte, zu denen die Distanzmatrix berechnet wird, lassen sich zwanglos Positionen von Messpunkten zuordnen, was zu folgenden Interpretationen bei der Anwendung der Lemmata führt:

Lemma 12: Durch die Anwendung der Funktion g auf die einzelnen Elemente der Distanzmatrix erhält man eine neue Matrix, die auf der Diagonalen nur Einsen stehen hat; insbesondere wird hier der Fall modelliert, dass sich Strahlung in einem absorbierenden Medium ausbreitet. Ist der Dämpfungskoeffizient bekannt, so kann man mit der Matrix das exakte Dämpfungsverhalten modellieren. Zur Analyse von Messdaten muss die Matrix *invertiert* werden – was wegen ihrer strikten positiven Definitheit immer möglich ist – da mit ihr zunächst die Mischung der Signale modelliert wird und erst die *Inverse* zu einer impliziten *Entmischung* der Signale während der Waveletanalyse führen. Wählt man die nicht invertierte Matrix direkt als Gewichtungsmatrix, so kann man umgekehrt natürlich auch bei bekannten Quellsignalen direkt die Wavelettransformationen der zu erwartenden Messungen modellieren.

Lemma 14: Durch die Anwendung der Funktion g auf die einzelnen Elemente der Distanzmatrix erhält man wiederum eine neue Matrix, die auf der Diagonalen wenn nicht Einsen, so doch die größten Werte stehen hat. $r > 0$ muss hier aus dem Kontext der Datenerhebung passend gewählt werden, so könnte zum Beispiel der Radius oder der Durchmesser von Elektroden oder Sensoren eingesetzt werden. Üblicherweise wird man $\alpha = 1$ wählen, aber auch andere Werte sind möglich und – abhängig vom Kontext – eventuell auch sinnvoll. Wiederum muss zur Analyse von Messdaten die Inverse benutzt werden.

Die anderen Lemmata entspringen nicht mehr direkt einer Modellierung physikalischer Verhältnisse, ermöglichen aber weitere Konstruktionen *invertierbarer* Matrixwavelets.

Lemma 15: Dieses Lemma ermöglicht die Konstruktion eines Wavelets direkt aus einer Distanzmatrix. Auf der Diagonalen der Distanzmatrix stehen nur Nullen und daher gehen in die Elemente der Matrixwavelet-Transformierten $(W_\Psi f(s, t))_k, k = 1 \dots n$ die *Informationen des Messpunkts k überhaupt nicht, und die seiner näheren Umgebung nur sehr schwach* ein.

Lemma 13: Dieses Lemma ist eine Verallgemeinerung von Lemma 12 für komplexe Matrizen, die jetzt nicht mehr unbedingt Distanzmatrizen sein müssen, um zur Konstruktion von Matrixwavelets zu taugen.

Alle diese Lemmata lassen jedoch die Frage offen, ob eine Distanzmatrix so auf eine Matrix von Phasenverschiebungen abgebildet werden kann, dass sich am Ende der obigen Konstruktion ein Matrixwavelet ergibt. Dass dies nicht mit jeder beliebigen Distanzmatrix funktionieren kann ist offen-

sichtlich, denn die Distanzmatrix D_S zum n -dimensionalen Einheitssimplex skaliert mit dem Faktor 2π hat zwar eine invertierbare Distanzmatrix, aber alle Einträge abseits der Diagonalen sind 2π und somit hat die Matrix E_S mit $(E_S)_{kl} := e^{i(D_S)_{kl}}, 1 \leq k, l \leq n$ nur Rang 1.

An diesem Punkt stellt sich jedoch auch die Frage nach der Nützlichkeit eines solchen Ansatzes. Denkt man an das Beispiel zur Quellenlokalisation auf Seite 90 zurück, so wäre mit dem oben definierten E_S gerade dann ein Maximum in einer Komponente der Matrixwavelet-Transformierten zu erwarten, wenn die Position der Signalquelle der Position eines Detektors entspricht. Jedenfalls gilt das folgende Lemma:

Lemma 16 *Sei $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Distanzmatrix zu n paarweise verschiedenen Punkten und dazu die Matrixwertige Funktion $E(\zeta), \zeta \in \mathbb{R}$ definiert durch $E_{kl}(\zeta) := e^{i\zeta D_{kl}}, 1 \leq k, l \leq n$. Sei außerdem ψ ein eindimensionales Wavelet und es gebe $\omega, \epsilon \in \mathbb{R}$, so dass $E(\zeta) \cdot \hat{\psi}(\zeta)$ invertierbar ist auf $(\omega - \epsilon, \omega + \epsilon)$, dann ist $\Psi := \left(\hat{\psi} \cdot E \right)^\vee$ ein Matrixwavelet.*

BEWEIS Zu zeigen sind die Existenz und Invertierbarkeit von C_ψ .

1. Existenz:

Aus Abschnitt C.3 entnimmt man, dass die Phasenkorrektur durch die Matrix E nur eine Zeitverschiebung der Elementfunktionen von Ψ bedeutet, mit anderen Worten, es gilt $\Psi_{kl} = \psi(\cdot - D_{kl}) \forall k, l$. Die elementweise Existenz von C_ψ folgt damit aus Satz 22.

2. Invertierbarkeit:

Da $C_\psi = \int_{\mathbb{R}} \hat{\Psi}^T(\omega) \cdot \hat{\Psi}(\omega) / |\omega| d\omega$ und $\hat{\Psi}^T(\omega) \cdot \hat{\Psi}(\omega)$ positiv definit ist, dürfte strikte positive Definitheit nur auf einer Nullmenge auftreten, damit C_Ψ nicht invertierbar ist. Jedoch ist $\det E(\zeta) \cdot \hat{\psi}(\zeta) \neq 0 \forall \zeta \in (\omega - \epsilon, \omega + \epsilon)$ und wie in der Argumentation zu Satz 21 folgt die Invertierbarkeit von C_Ψ .

Damit ist alles gezeigt. ■

Bemerkung 10 Selbst wenn E_S im Einzelfall nicht invertierbar sein sollte, so ist in jedem Fall $E_S + (n - 1) \cdot \mathbb{I}_n$ invertierbar nach dem Satz von Gerschgorin [Ste01, Theorem 3.2], da diagonaldominant.

7.1.2 Konstruktionen aus mehreren Wavelets

Im vorigen Unterabschnitt wurde die Konstruktion von topologisch angepassten Matrixwavelets ausgehend von einem einzigen eindimensionalen Wavelet

dargestellt, das nach Anpassung von zeitlicher Lage und Phase als Elementfunktion benutzt wurde. Eine andere Möglichkeit ist, von vornherein verschiedene Wavelets als Elementfunktionen zu wählen.

Da für analytische Wavelets $\hat{\psi}(\omega) = 0 \ \forall \omega \leq 0$ gilt, kann man mit Hilfe von Lemma 1 und 2 ihren Träger relativ problemlos an gewünschte Gegebenheiten für die Analyse anpassen. So könnten zum Beispiel Matrixwavelets erzeugt werden, deren Elementfunktionen auf verschiedene Frequenzen in den einzelnen Signalkomponenten ansprechen und dergleichen.

Da in den folgenden Anwendungen solche Aspekte jedoch nicht vorkommen, sollen diese Gedanken hier nicht weiter ausgearbeitet werden.

Kapitel 8

Rekonstruktionsqualität

In diesem Kapitel soll exemplarisch die Rekonstruktionsqualität der Matrixwavelet-Transformation an einem einfachen vektorwertigen Signal T mit drei Kanälen und 3072 Samples, dargestellt in Abbildung 8.1, untersucht werden. Dabei werden zu verschiedenen Hintransformationen jeweils alle vier der oben definierten Rücktransformationen untersucht.

Die Hintransformationen im Einzelnen:

1. Identische Elementfunktionen mit verschiedenen Gewichten. Betrachtet werden die Matrixwavelets $\Psi_{F,3} := F \cdot \psi_{Morlet,3}$ und $\Psi_{F,5} := F \cdot \psi_{Morlet,5}$ mit

$$F := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{pmatrix}$$

als Gewichtungsmatrix. Es gilt $\text{cond}(F) \approx 45$.

2. Paarweise verschiedene Elementfunktionen ohne Gewichtung, nämlich

$$\Psi_{3-4} := \begin{pmatrix} \psi_{Morlet,3} & \psi_{Morlet,3.125} & \psi_{Morlet,3.25} \\ \psi_{Morlet,3.375} & \psi_{Morlet,3.5} & \psi_{Morlet,3.625} \\ \psi_{Morlet,3.75} & \psi_{Morlet,3.875} & \psi_{Morlet,4} \end{pmatrix}$$

und

$$\Psi_{3-11} := \begin{pmatrix} \psi_{Morlet,3} & \psi_{Morlet,4} & \psi_{Morlet,5} \\ \psi_{Morlet,6} & \psi_{Morlet,7} & \psi_{Morlet,8} \\ \psi_{Morlet,9} & \psi_{Morlet,10} & \psi_{Morlet,11} \end{pmatrix}$$

ohne Gewichtung.

3. Paarweise verschiedene Elementfunktionen mit Gewichtung in der Form $\Psi_{F,3-4} := F \odot \Psi_{3-4}$ und $\Psi_{F,3-11} := F \odot \Psi_{3-11}$.

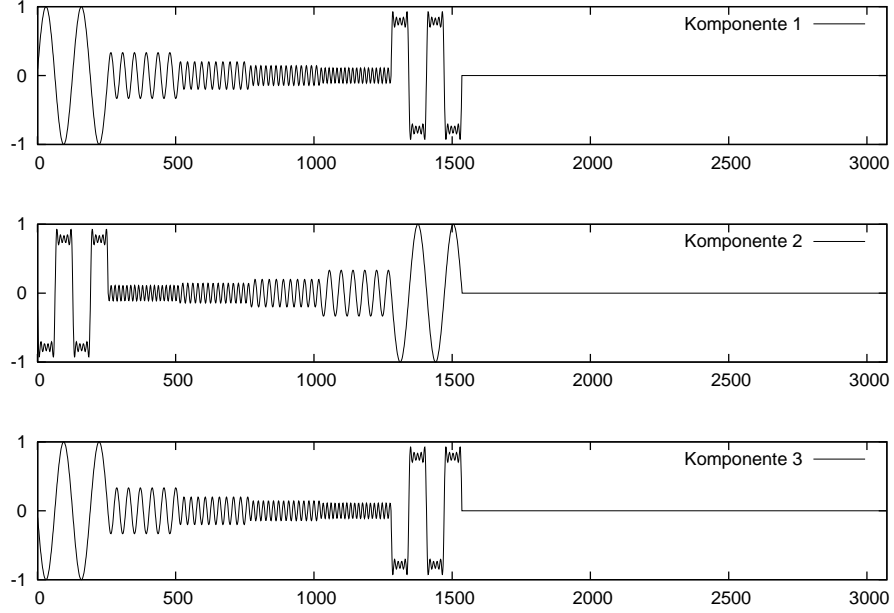


Abbildung 8.1: Das vektorwertige Testsignal T für die Matrixwavelet-Transformation

Für das Matrixwavelet $\Psi_{F,3-11}$ aus Fall 3 und die Rücktransformation mit $\text{diag}(\Psi_{F,3-11})$ ergibt sich dabei zum Beispiel die folgende Rechnung:

1. Zunächst wird die Matrixwavelet-Transformierte nach Definition 28 berechnet:

$$\begin{aligned}
 W_{\Psi_{F,3-11}} T(s, t) &= \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int_{\mathbb{R}} \left(\overline{\Psi_{F,3-11} \left(\underbrace{\frac{t-\tau}{s}}_{:=\vartheta} \right)} \right) \times T(\tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{\sqrt{|s|}} \times \\
 &\quad \int_{\mathbb{R}} \left(\begin{array}{ccc} \frac{2 \cdot \overline{\psi_{\text{Morlet},3}(\vartheta)}}{7 \cdot \overline{\psi_{\text{Morlet},6}(\vartheta)}} & \frac{3 \cdot \overline{\psi_{\text{Morlet},4}(\vartheta)}}{11 \cdot \overline{\psi_{\text{Morlet},7}(\vartheta)}} & \frac{5 \cdot \overline{\psi_{\text{Morlet},5}(\vartheta)}}{13 \cdot \overline{\psi_{\text{Morlet},8}(\vartheta)}} \\ \frac{17 \cdot \overline{\psi_{\text{Morlet},9}(\vartheta)}}{19 \cdot \overline{\psi_{\text{Morlet},10}(\vartheta)}} & \frac{23 \cdot \overline{\psi_{\text{Morlet},11}(\vartheta)}}{23 \cdot \overline{\psi_{\text{Morlet},11}(\vartheta)}} & \end{array} \right) \times \\
 &\quad T(\tau) d\tau.
 \end{aligned}$$

2. Für die Rücktransformation mit $\text{diag}(\Psi_{F,3-11})$ muss die Zulässigkeits-

matrix nach Definition 37 berechnet werden:

$$\begin{aligned}
C_{\Psi_{F,3-11}} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\text{diag} \left(\hat{\Psi}_{F,3-11}(\omega) \right) \times \overline{\left(\hat{\Psi}_{F,3-11}(\omega) \right)}}{|\omega|} d\omega \\
&= \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 2\hat{\psi}_{\text{Morlet},3}(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & 11\hat{\psi}_{\text{Morlet},7}(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 23\hat{\psi}_{\text{Morlet},11}(\omega) \end{pmatrix} \times \\
&\quad \begin{pmatrix} \overline{2\hat{\psi}_{\text{Morlet},3}(\omega)} & \overline{3\hat{\psi}_{\text{Morlet},4}(\omega)} & \overline{5\hat{\psi}_{\text{Morlet},5}(\omega)} \\ \overline{7\hat{\psi}_{\text{Morlet},6}(\omega)} & \overline{11\hat{\psi}_{\text{Morlet},7}(\omega)} & \overline{13\hat{\psi}_{\text{Morlet},8}(\omega)} \\ \overline{17\hat{\psi}_{\text{Morlet},9}(\omega)} & \overline{19\hat{\psi}_{\text{Morlet},10}(\omega)} & \overline{23\hat{\psi}_{\text{Morlet},11}(\omega)} \end{pmatrix} \frac{d\omega}{|\omega|}.
\end{aligned}$$

3. Letztendlich produziert die inverse Transformation mit $\text{diag}(W_{\Psi_{F,3-11}})$ wieder eine mehr oder weniger genaue Approximation des Originalsignals T , also

$$\begin{aligned}
T &\approx C_{\Psi}^{-1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}} \text{diag} \left(\Psi_{F,3-11} \left(\underbrace{\frac{x-\tau}{\sigma}}_{:=\vartheta} \right) \right) W_{\Psi_{F,3-11}} T d\tau \frac{d\sigma}{\sigma^2} \\
&= C_{\Psi}^{-1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{|\sigma|}} \times \\
&\quad \begin{pmatrix} 2\psi_{\text{Morlet},3}(\vartheta) & 0 & 0 \\ 0 & 11\psi_{\text{Morlet},7}(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 13\psi_{\text{Morlet},11}(\vartheta) \end{pmatrix} \times \\
&\quad W_{\Psi_{F,3-11}} T d\tau \frac{d\sigma}{\sigma^2}.
\end{aligned}$$

Um das Ergebnis vorwegzunehmen: Es wird sich dabei zeigen, dass die schnellsten Rekonstruktionen erwartungsgemäß nicht die stabilsten sind, allerdings die Stabilität auch nicht auf einfache Weise mit der Konditionszahl der Zulässigkeitsmatrix zusammenhängt.

Vor allem darf nicht vergessen werden, dass alle obigen Gleichungen nur im Sinne von Distributionen gelten und daher, vor allem unter der Voraussetzung eines in beiden Richtungen beschnittenen und diskretisierten Bereichs von Skalen, eine punktweise exakte Rekonstruktion nicht erwartet werden kann.

Vor allem die sehr schnelle Rekonstruktion mit Δ , die sich zusätzlich noch außerhalb der \mathcal{L}_2 -Theorie bewegt, neigt schnell zu katastrophalen Fehlern.

Identische Elementfunktionen mit Gewichtung

Abbildung 8.2 zeigt die Ergebnisse, die sich bei der Verwendung identischer Elementfunktionen mit verschiedener Gewichtung ergeben.

Für das Matrixwavelet $\Psi_{F,5}$ liegen alle Ergebnisse in einem unkritischen Bereich, mit den üblichen Problemen in der Umgebung von Unstetigkeitsstellen im Signal oder seinen Ableitungen. Dennoch ist die Abweichung durchweg kleiner als 7% der Maximalamplitude des Signals, wobei eine bessere Rekonstruktion des konstanten Signalabschnitts wünschenswert sein könnte.

Das Matrixwavelet $\Psi_{F,3}$ schneidet sogar noch besser ab, mit einer maximalen Abweichung von durchweg unter 5% der Maximalamplitude, jedoch deutlicher Welligkeit des Fehlers für die Rekonstruktion mit Δ .

Paarweise verschiedene Elementfunktionen ohne Gewichtung

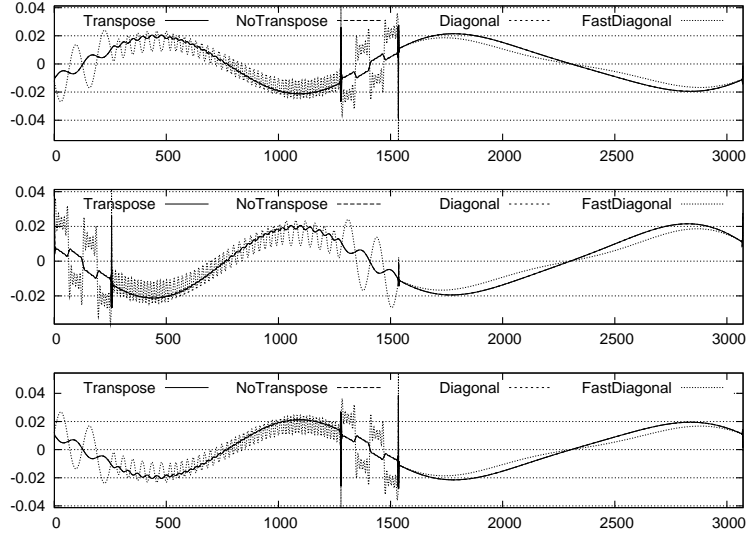
Die Abbildungen 8.3 und 8.4 zeigen die Ergebnisse bei Verwendung paarweise verschiedener Elementfunktionen ohne Gewichtung. Die Rekonstruktion mit Δ schlägt in beiden Fällen völlig fehl, während die restlichen Rekonstruktionen, abgesehen von größeren Problemen bei der Rekonstruktion mit Ψ_{3-4} in der Umgebung von Unstetigkeitsstellen der Ableitung des Signals, sehr gut sind, bei deutlicher Welligkeit der Rekonstruktion mit $\mathbb{I}_3 \odot \Psi_\cdot = \text{diag}(\Psi_\cdot)$.

Paarweise verschiedene Elementfunktionen mit Gewichtung

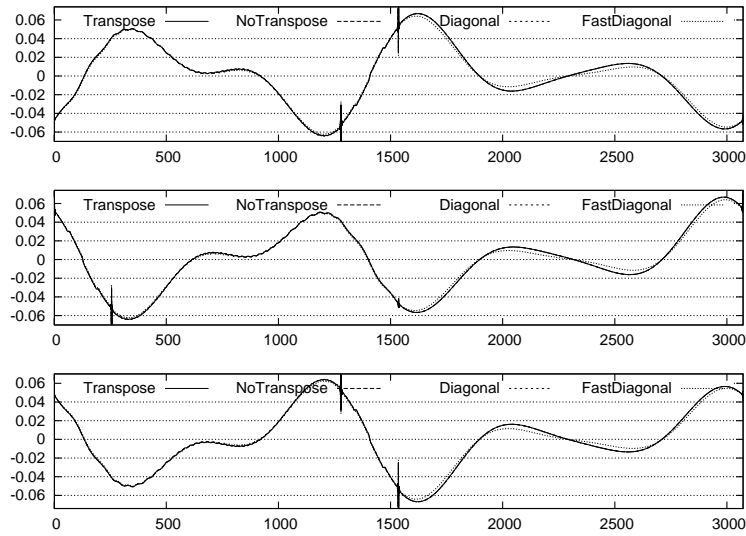
Abbildung 8.5 zeigt die Ergebnisse bei Verwendung paarweise verschiedener Elementfunktionen mit Gewichtung. Während die Qualität der Rekonstruktion für die Analyse mit $\Psi_{F,3-4}$ sehr gut ist, scheitert für $\Psi_{F,3-11}$ die schon als problematisch bekannte Rekonstruktion mit Δ .

Konditionszahlen der Zulässigkeitsmatrizen

Da für die Rücktransformation immer die Inverse der Zulässigkeitsmatrix betrachtet werden muss, lohnt sich zur Einschätzung eventueller Stabilitätsprobleme auch ein Blick auf die Konditionszahlen der Zulässigkeitsmatrizen in Tabelle 8.1. Diese offenbart jedoch keinen direkten Zusammenhang zwischen der Größe der Konditionszahl und dem maximalen beobachteten Fehler.

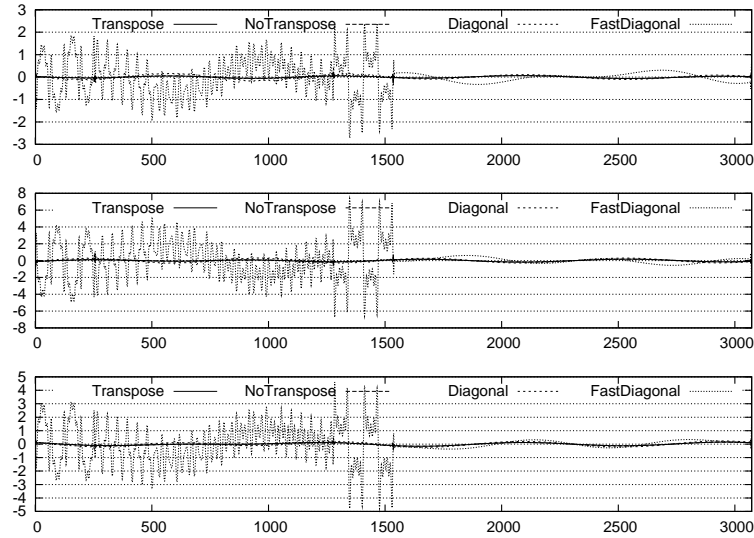


(a) Absoluter Fehler der Rekonstruktion des mit $\Psi_{F,3}$ analysierten Testsignals. Die Rekonstruktion erfolgte mit $\Psi_{F,3}^T$ (Transpose), $\Psi_{F,3}$ (NoTranspose), $\mathbb{I}_3 \odot \Psi_{F,3}$ (Diagonal) und Δ (FastDiagonal).

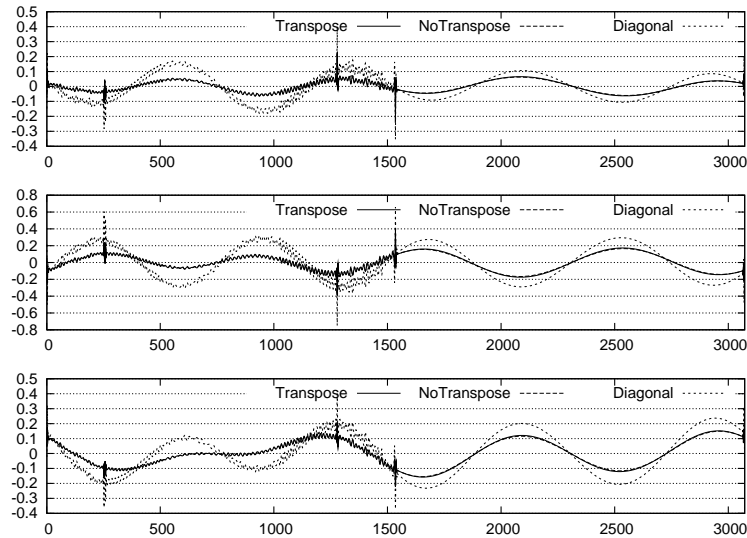


(b) Absoluter Fehler der Rekonstruktion des mit $\Psi_{F,5}$ analysierten Testsignals. Die Rekonstruktion erfolgte mit $\Psi_{F,5}^T$ (Transpose), $\Psi_{F,5}$ (NoTranspose), $\mathbb{I}_5 \odot \Psi_{F,5}$ (Diagonal) und Δ (FastDiagonal).

Abbildung 8.2: Absoluter Fehler bei der Rekonstruktion aus einer Waveletanalyse mit $\Psi_{F,3}$ (oben) und $\Psi_{F,5}$ (unten), bei der also alle Elementfunktionen identisch sind, aber verschiedene Gewichtungsfaktoren tragen.

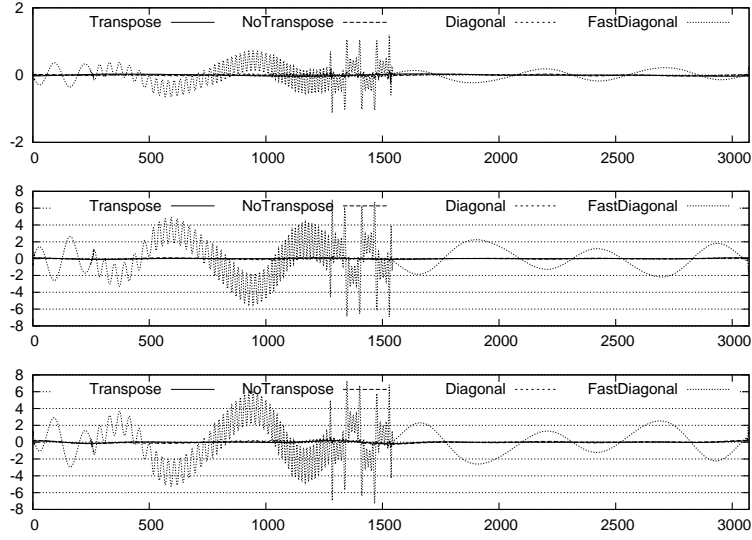


(a) Absoluter Fehler der Rekonstruktion des mit Ψ_{3-4} analysierten Testsignals. Die Rekonstruktion erfolgte mit Ψ_{3-4}^T (Transpose), Ψ_{3-4} (NoTranspose), $\mathbb{I}_3 \odot \Psi_{3-4}$ (Diagonal) und Δ (FastDiagonal).

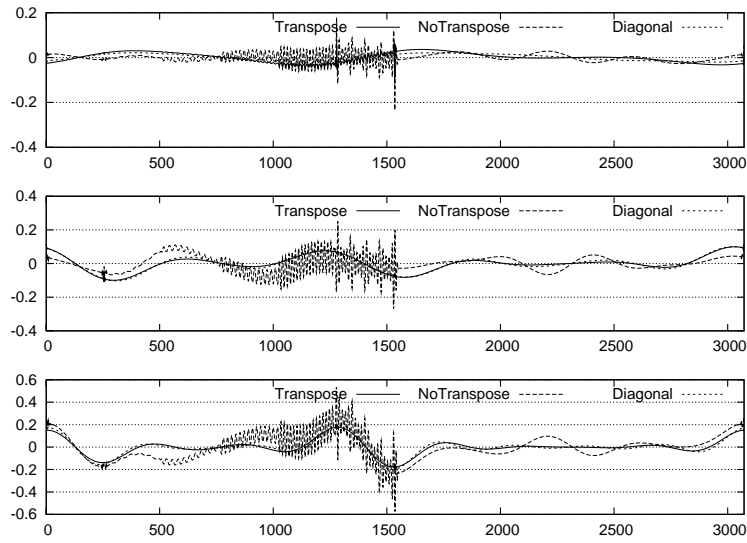


(b) Wie oben, zur besseren Übersicht ohne die Rekonstruktion mit Δ .

Abbildung 8.3: Absoluter Fehler bei der Rekonstruktion aus einer Wavelet-analyse mit Ψ_{3-4} , bei der also alle Elementfunktionen verschieden sind und keine Gewichtungsfaktoren tragen. Der Fehler der schnellsten Rekonstruktion (FastDiagonal) ist katastrophal, obwohl die Konditionszahl der zugehörigen Zulässigkeitsmatrix im Rahmen bleibt (siehe Tabelle 8.1).

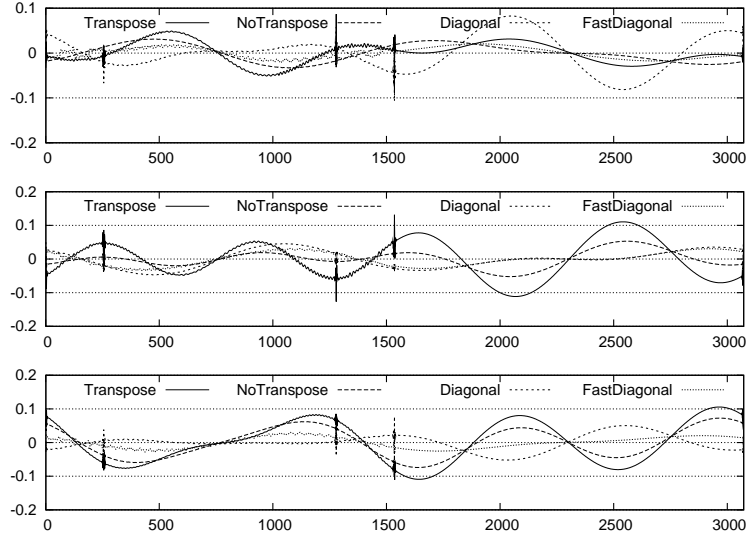


(a) Absoluter Fehler der Rekonstruktion des mit Ψ_{3-11} analysierten Testsignals. Die Rekonstruktion erfolgte mit Ψ_{3-11}^T (Transpose), Ψ_{3-11} (NoTranspose), $\mathbb{I}_3 \odot \Psi_{3-11}$ (Diagonal) und Δ (FastDiagonal).

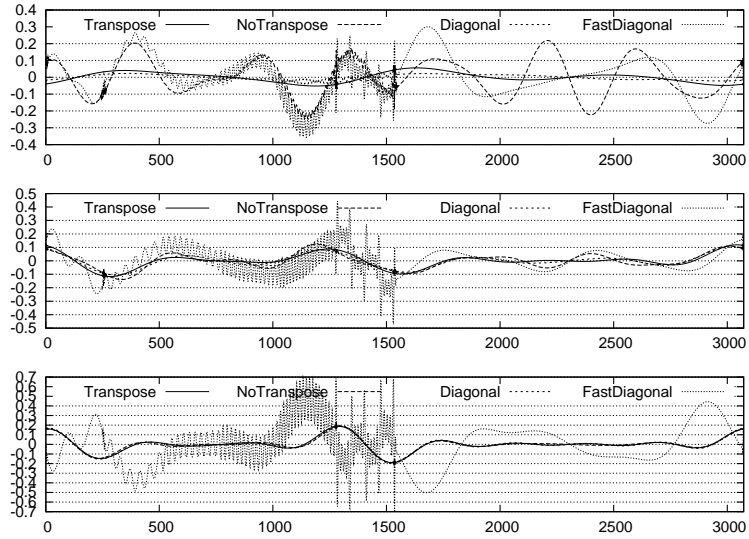


(b) Wie oben, zur besseren Übersicht ohne die Rekonstruktion mit Δ .

Abbildung 8.4: Absoluter Fehler bei der Rekonstruktion aus einer Waveletanalyse mit Ψ_{3-11} ; die Probleme unterscheiden sich nicht wesentlich von denen bei Ψ_{3-4} .



(a) Absoluter Fehler der Rekonstruktion des mit $\Psi_{F,3-4}$ analysierten Testsignals. Die Rekonstruktion erfolgte mit $\Psi_{F,3-4}^T$ (Transpose), $\Psi_{F,3-4}$ (NoTranspose), $\mathbb{I}_3 \odot \Psi_{F,3-4}$ (Diagonal) und Δ (FastDiagonal).



(b) Absoluter Fehler der Rekonstruktion des mit $\Psi_{F,3-11}$ analysierten Testsignals. Die Rekonstruktion erfolgte mit $\Psi_{F,3-11}^T$ (Transpose), $\Psi_{F,3-11}$ (NoTranspose), $\mathbb{I}_3 \odot \Psi_{F,3-11}$ (Diagonal) und Δ (FastDiagonal).

Abbildung 8.5: Absolute Fehler bei der Rekonstruktion aus einer Waveletanalyse mit $\Psi_{F,3-4}$ (oben) und $\Psi_{F,3-11}$ (unten). Hier gibt es erhebliche Probleme bei $\Psi_{F,3-11}$.

Tabelle 8.1: Konditionszahlen der Zulässigkeitsmatrizen

Wavelets für	Synthese			
Analyse	Ψ^T	Ψ	$\text{diag}(\Psi)$	Δ
$\Psi_{F,3}$	2060	1231.7	424.25	45.388
$\Psi_{F,5}$	2060	1231.7	424.25	45.388
Ψ_{3-4}	1641.8	15506	1561.5	43991
Ψ_{3-11}	2.8216	95.838	4.0320	1035.1
$\Psi_{F,3-4}$	545.45	1044.6	529.47	44.257
$\Psi_{F,3-11}$	1.3711	144.32	34.687	61.545

Die beobachteten Konditionszahlen unterscheiden sich um mehrere Größenordnungen, allerdings treten sowohl schlechte Rekonstruktionen bei kleiner Konditionszahl (Analyse mit $\Psi_{F,3-11}$, Synthese mit Δ), als auch gute Rekonstruktionen bei großer Konditionszahl (Analyse mit $\Psi_{F,3}$ und $\Psi_{F,5}$, Synthese mit Ψ^T) auf. Für die Zeilen zu $\Psi_{F,3}$ und $\Psi_{F,5}$ ergeben sich erstaunlicherweise identische Konditionszahlen zu verschiedenen Matrizen!

Kapitel 9

EEG-Analyse mit Matrixwavelets

In diesem Kapitel sollen nun die Matrixwavelets zur Analyse von EEG-Daten zum Einsatz kommen. Um dabei Vorteile gegenüber einer normalen Waveletanalyse zu erzielen, können hier zusätzliche Freiheitsgrade bei der Auswahl der Elementfunktionen ausgereizt werden. Da die Daten keine spezielle Wahl des Wavelets rechtfertigen, soll im Folgenden ein Morlet-Wavelet mit gleichem Parameter die Grundlage für alle Elementfunktionen sein, jedoch wird jede Elementfunktion hinsichtlich ihrer Gewichtung speziell angepasst. Eine zeitliche Translation ist nicht erforderlich, da die optimalen Verschiebungen so gering sind¹, dass sie auf die Analyse so gut wie keine Auswirkung hätten.

Eine zentrale Methode für die Untersuchung wird dabei die *Hauptkomponentenanalyse* der Matrixwavelet-Transformierten der EEG-Daten sein, die auf Grund der Vielfalt ihrer Ergebnisse zunächst erläutert werden soll.

9.1 Hauptkomponentenanalyse

9.1.1 Grundlagen

Die so genannte *Hauptkomponentenanalyse* zielt darauf ab

1. herauszufinden, wie groß die Dimension einer Menge von gemessenen Zeitreihen ist, oder mit anderen Worten, ob sich die gemessenen Zeitreihen als Linearkombination einiger „elementarer“ Reihen darstellen lassen [Skr89] und
2. gegebenenfalls die Grundsignale von zusätzlich vorhandenem Rauschen zu separieren, falls es das Signal-Rausch-Verhältnis zulässt.

¹Üblicherweise im Bereich ± 3 Samples, was weit unterhalb aller Latenzen ist, die für die untersuchten Effekte interessant sein könnten.

Die Idee dabei ist die Folgende:

Seien m (auch komplexe) mittelwertfreie² Zeitreihen a_1, \dots, a_m der Länge n (üblicherweise mit $n \gg m$) gegeben, die zu einer Matrix $M := [a_1, \dots, a_m]^T \in \mathbb{C}^{m \times n}$ zusammengefasst werden. Dann ist *empirische Covarianzmatrix* der Signale gegeben durch $C := M^H M \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Offensichtlich ist in diesem Fall C hermitesch und besitzt daher eine Orthonormalbasis $\{v_1, \dots, v_m\}$ aus Eigenvektoren. Damit folgt

$$[v_1, \dots, v_n]^H C [v_1, \dots, v_n] = \Lambda,$$

wobei Λ eine Diagonalmatrix ist, auf deren Diagonale die Eigenwerte von C stehen.

Natürlich gilt in diesem Fall für $1 \leq k \leq m$:

$$a_k = \sum_{l=1}^m f_{kl} v_l.$$

Man kann die Zerlegung in Eigenvektoren also auch als eine Zerlegung in einzelne „Hauptkomponenten“ auffassen, die zusätzlich noch paarweise orthogonal sind.

Abseits dieser Überlegungen im Rahmen der linearen Algebra gibt es hier auch einen Vorteil im Rahmen der stochastischen Interpretation:

Setzt man voraus, dass die Zeitreihen jeweils Realisierungen mittelwertfreier gaußverteilter Prozesse sind³, dann sind nach der Zerlegung auch die e_k wieder von dieser Gestalt und überdies auch noch statistisch unabhängig, da in diesem Kontext Orthogonalität und statistische Unabhängigkeit äquivalent sind.

Die Instabilität der Eigenvektorzerlegung großer Matrizen macht es jedoch notwendig, einen anderen Weg zu beschreiten, nämlich den der Singulärwertzerlegung.

Satz 32 [GvL96, S. 73] Sei $M \in \mathbb{C}^{m \times n}$ und $n \geq m$, dann gibt es $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $\Sigma \in \mathbb{C}^{m \times n}$ und $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$, so dass

$$U^H U = \mathbb{I}_m, \quad \Sigma = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_m \geq 0}, \quad V^H V = \mathbb{I}_n$$

²Man kann diese Voraussetzung fallen lassen, wenn man statt der Covarianzmatrix die Korrelationsmatrix diagonalisiert.

³Was für die hier untersuchten Wavelettransformierten zumindest anhand einer Überprüfung der empirischen ersten Momente nicht widerlegt wird.

und insbesondere

$$M = U\Sigma V^H.$$

Eine einfache Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} C &= M^H M = (V\Sigma^H U^H) (U\Sigma V^H) \\ &= V\Sigma^H \Sigma V \\ &= V \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbb{I}_m \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m & \dots & 0 \end{pmatrix} V^H \\ &= V \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} V^H \end{aligned}$$

und damit führt auch die Singulärwertzerlegung von A zu einer Zerlegung, die der Eigenvektorzerlegung von C entspricht; insbesondere ordnet die Singulärwertzerlegung per Konvention die Singulärwerte in absteigender Reihenfolge an.

Die Singulärwertzerlegung zerlegt also das ursprüngliche Signal in drei Teile: Die – aufgrund ihrer Orthogonalität dekorrelierten – Komponenten in den Zeilen der Matrix V^H , die „Gewichte“ der Komponenten auf der Diagonalen der Matrix S und die Koeffizienten der Komponenten, die den Beitrag einer Komponente zur ursprünglichen Zeitreihe beschreiben in den Zeilen der Matrix U .

9.1.2 Unterschiede zwischen reeller und komplexer Hauptkomponentenanalyse

Im Prinzip könnte man schon die Rohdaten zerlegen, wie oben beschrieben, allerdings verschenkt man dabei die Möglichkeiten, die die Hauptkomponentenanalyse der komplexen Matrixwavelet-Transformierten bietet.

Bei den reellen Rohdaten gibt es das Problem, dass zwei Kanäle eventuell teilweise durch Phasenverschiebung auseinander hervor gehen und dadurch sogar orthogonal werden können. Dies ist natürlich für die Hauptkomponentenanalyse fatal, denn wenn zwei Kanäle, beziehungsweise Zeitreihen, schon

orthogonal sind, dann gibt es für die Singulärwertzerlegung nichts mehr zu tun. Eine Hauptkomponentenanalyse *nach* der Matrixwavelet-Transformation bringt hier tiefere Erkenntnisse, wie die Abbildungen 9.1 und 9.2 zeigen.

9.2 Überlegungen zur Anwendung auf das EEG

In den folgenden Abschnitten soll nun abschließend im Rahmen einer explorativen Datenanalyse untersucht werden, inwieweit verschiedene Matrixwavelet-Transformationen unterschiedliche Ergebnisse im Rahmen einer Hauptkomponentenanalyse liefern. Eine der Fragen wird dabei sein, ob die Qualität der gewonnenen Ergebnisse maßgeblich von verschiedenen Besetzungen der Gewichtungsmatrix abhängt.

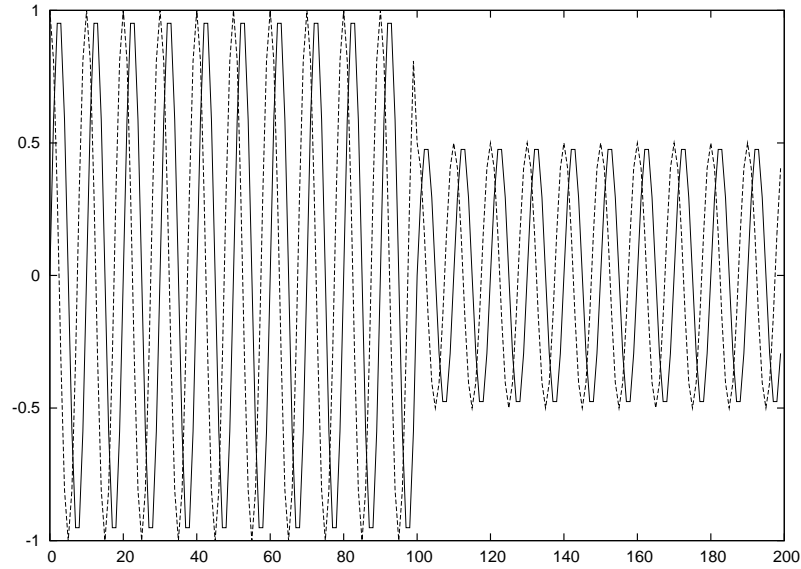
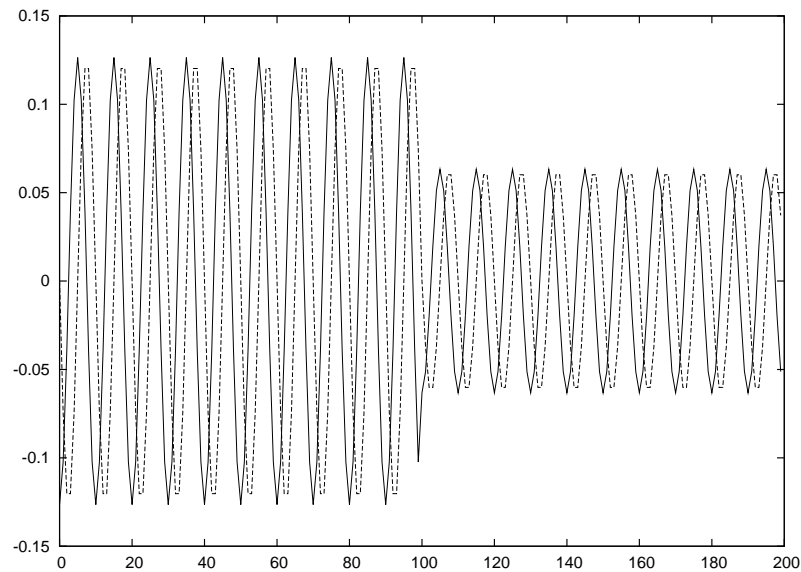
Dazu werden folgende Transformationen durchgeführt:

1. Die Matrixwavelet-Transformation mit der Einheitsmatrix als Gewichtungsmatrix. Dies entspricht der unabhängigen Transformation aller 30 Kanäle.
2. Die Matrixwavelet-Transformation mit der *Inversen* der Matrix aus Lemma 14 als Gewichtungsmatrix, wobei die Abstandsmatrix anhand eines sphärischen Kopfmodells mit 17cm Kopf- und 1cm Elektroden-durchmesser errechnet wurde; allerdings kann allein damit die Tatsache, dass mit den Elektroden eigentlich *Feldvektoren* gemessen werden nicht berücksichtigt werden. Vielmehr entspricht dies einem Modell in dem angenommen wird, die Elektroden tasteten ein *skalares* Feld ab, die Signalquellen lägen direkt unter den Elektroden und die Intensität, mit der ein Signal an anderen Elektroden gemessen wird, hänge nur vom Quadrat des Elektrodenabstands ab.

Diese Annahmen stellen eine starke Vereinfachung dar, allerdings würde eine exakte Modellierung auf die Modellierung von Dipolquellen im dreidimensionalen Raum hinauslaufen, was im Rahmen dieser Arbeit nicht geleistet werden kann. Darüberhinaus basieren auch Modelle auf Basis von Dipolquellen nur auf vereinfachenden Annahmen, da Ensembles von aktiven Neuronen eben keine punktförmigen Quellen sein müssen.

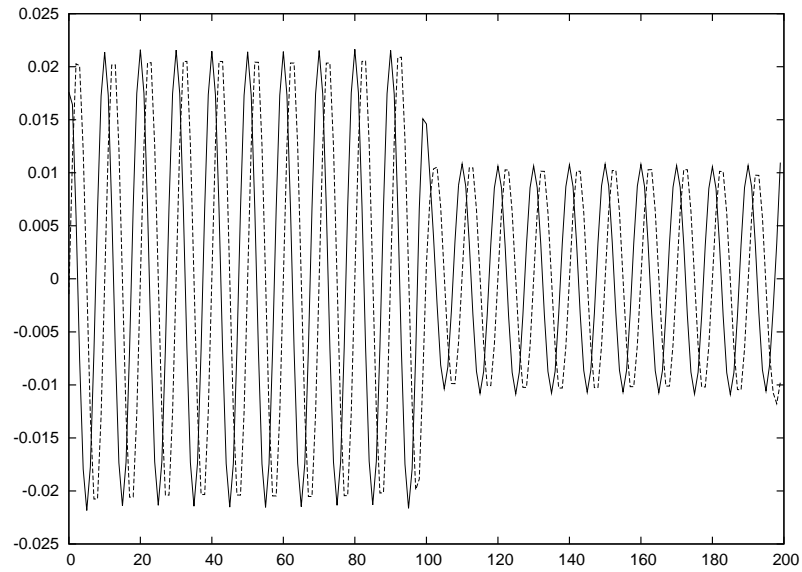
Jedenfalls wird durch die Gewichtung mit der Inversen unter den gegebenen Annahmen eine *Entmischung* der gemessenen Signale bewirkt, mithin also ihre *Verschiedenheit* betont.

3. Die Matrixwavelet-Transformation mit der Matrix der empirischen Korrelationskoeffizienten der Kanäle der Ursprungssignale als Gewichtungsmatrix. Im Gegensatz zum vorherigen Punkt werden hier die Kanäle

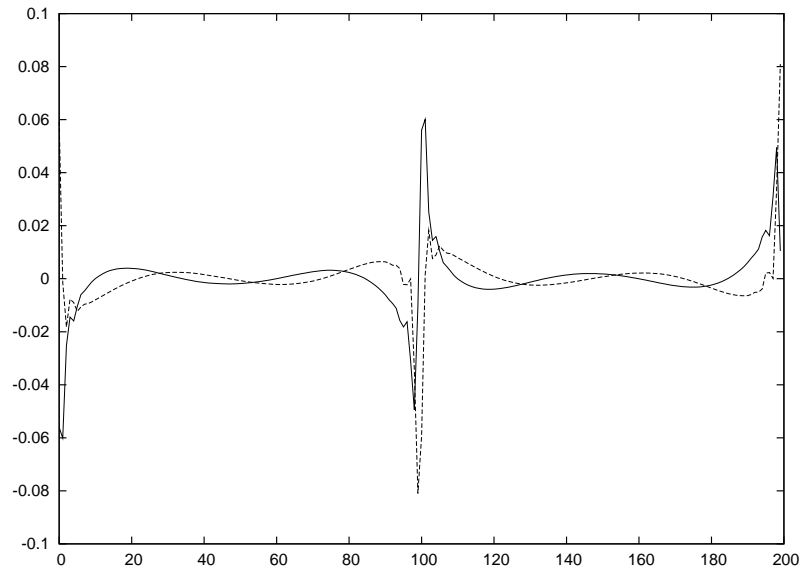
(a) Zwei phasenverschobene *reelle* Zeitreihen, die (fast) orthogonal sind.

(b) Die Hauptkomponentenanalyse bewirkt lediglich eine Normierung.

Abbildung 9.1: Die Hauptkomponentenanalyse (fast) orthogonaler Zeitreihen bringt keine neuen Erkenntnisse über die Daten, obwohl es schon etwas zu entdecken gäbe, wie Abbildung 9.2 zeigt.



(a) Die erste Komponente ist nun *komplex* und sammelt die offensichtlichsten Merkmale *beider* Zeitreihen in *einer* komplexen harmonischen Schwingung auf.



(b) Die zweite Komponente ist auch komplex und zeigt deutlich Singularitäten, die vorher verborgen blieben.

Abbildung 9.2: Die Komponenten der orthogonalen Zeitreihen aus Abbildung 9.1 nach der Hauptkomponentenanalyse ihrer *komplexen* Matrixwavelet-Transformierten. Die Komponenten trennen nun die dominierende komplexe harmonische Schwingung von den leicht zu übersehenden Singularitäten.

anhand ihrer Ähnlichkeit *zusammengemischt*, also ihre *Ähnlichkeit* betont.

Der empirische Korrelationskoeffizient zweier *mittelwertfreier, reeller Zeitreihen* a, b der Länge n ist dabei definiert als

$$c_{ab} := \frac{a^T b}{a^T a \cdot b^T b} \in [-1, 1].$$

Als Ergebnis jeder dieser Transformationen ergibt sich pro Versuchsperson und Bedingung eine komplexwertige Matrixwavelet-Transformierte, für die eine Hauptkomponentenanalyse mittels Singulärwertzerlegung durchzuführen ist. Bei einem EEG mit K Kanälen ergeben sich dabei insbesondere Matrixwavelet-Transformierte mit ebensovielen Komponenten, also pro Versuchsperson eine Menge von K diskretisierten Funktionen in Form von Matrizen $W^1, \dots, W^K \in \mathbb{C}^{m \times n}$,

Nun geht die Hauptkomponentenanalyse aber von Vektoren aus, die zwar Zeitreihen sein *können*, aber nicht *müssen*, also müssen die W^k s noch zu Vektoren umgeformt werden, was sich aber jeweils durch einfaches Verketteten ihrer Zeilen erreichen lässt

$$w_k := (W_{1,\cdot}^k, \dots, W_{m,\cdot}^k) \in \mathbb{C}^{m \cdot n}, k = 1, \dots, K,$$

und diese w_k fasst man nun endlich zur Matrix M für die Hauptkomponentenanalyse zusammen⁴

$$M := \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_K \end{pmatrix}.$$

Die erhaltenen Hauptkomponenten lassen sich umgekehrt einfach in Matrizen zurücktransformieren, so dass über die reinen Gewichtskoeffizienten in U und Σ auch die Hauptkomponenten aus V^T die folgendermaßen interpretierbaren Ergebnisse liefern:

9.2.1 U — Aktivierung und räumliche Schwerpunkte

Wie oben beschrieben, finden sich in den Zeilen der Matrix U die Beiträge der einzelnen Komponenten zur jeweiligen Ausgangszeitreihe, hier also zu den jeweiligen EEG-Kanälen. Da die EEG-Kanäle auch in einem geometrischen Kontext, nämlich ihrer in Abbildung 9.3 gezeigten Anordnung auf der Kopfoberfläche, existieren, ist es zum Beispiel interessant, ob sich die

⁴Ganz analog zur Anwendung der *Unabhängigkeitsanalyse* (Independent Component Analysis, *ICA*) zur Kompression von Bildern in [Oja00].

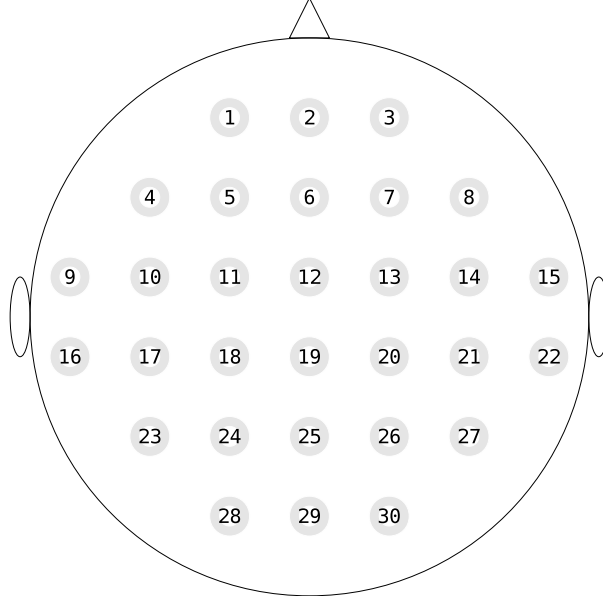


Abbildung 9.3: Anordnung und Nummerierung der Elektroden auf der Kopfoberfläche.

Aktivitätsschwerpunkte einzelner Komponenten unter den Bedingungen des Experiments signifikant verschieben.

Zu diesem Zweck werden die Koeffizienten der jeweiligen Komponente entsprechend der Anordnung der Elektroden auf dem Kopf in ein rechteckiges Gitterschema G einsortiert⁵, für die dominante Komponente 1 also folgendermaßen:

$$G := \begin{pmatrix} 0 & 0 & U_{1,1} & U_{2,1} & U_{3,1} & 0 & 0 \\ 0 & U_{4,1} & U_{5,1} & U_{6,1} & U_{7,1} & U_{8,1} & 0 \\ U_{9,1} & U_{10,1} & U_{11,1} & U_{12,1} & U_{13,1} & U_{14,1} & U_{15,1} \\ U_{16,1} & U_{17,1} & U_{18,1} & U_{19,1} & U_{20,1} & U_{21,1} & U_{22,1} \\ 0 & U_{23,1} & U_{24,1} & U_{25,1} & U_{26,1} & U_{27,1} & 0 \\ 0 & 0 & U_{28,1} & U_{29,1} & U_{30,1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Weiterhin muss noch der Schwerpunkt von G , der auch bei der Analyse der Komponenten eine wesentliche Rolle spielen wird, definiert werden:

Definition 41 Zu $G \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ist die Schwerpunktfunktion $S(G) : \mathbb{C}^{m \times n} \rightarrow [1, m] \times [1, n] \subset \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$1. \ S(G) := \frac{\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n |G_{k,l}|^{(k,l)}}{\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n |G_{k,l}|}, \text{ falls } G \neq 0 \text{ und}$$

⁵Das zwar der Form nach einer Matrix entspricht, aber eher als Funktion, die an diskreten Punkten definiert ist, verstanden werden sollte.

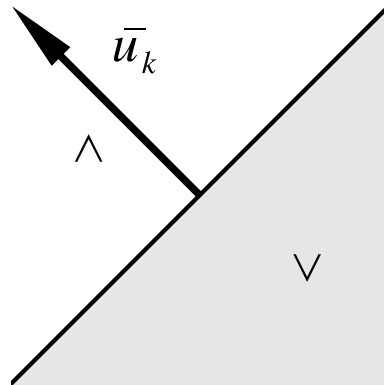


Abbildung 9.4: Anhand von \overline{u}_k lässt sich die komplexe Ebene in zwei Halbebenen „ \wedge “ und „ \vee “ separieren.

$$2. \ S(G) := ((m+1)/2, (n+1)/2), \text{ falls } G = 0.$$

Damit gilt dann zum Beispiel $S(\mathbb{I}_n) = ((n+1)/2, (n+1)/2)$, $S\left(\begin{pmatrix} 2 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = (1, 4/3)$ und so weiter, und so lässt sich auch der Aktivitätsschwerpunkt bestimmen.

Bemerkung 11 Die Schwerpunktfunktion ist *nicht* linear, so dass der Schwerpunkt des arithmetischen Mittels zweier Matrizen im allgemeinen *verschieden* ist von dem arithmetischen Mittel ihrer Schwerpunkte!

Die einfache Berechnung der Schwerpunkte auf diese Art führt jedoch zu dem enttäuschenden Ergebnis, dass *alle* Schwerpunkte fast genau in der Mitte der Matrix zu liegen kommen. Daher werden in der Gehirnforschung bei der Analyse von Gehirnstromdaten die Schwerpunkte getrennt für die positiven und negativen Elemente der Matrix M betrachtet.

Da jedoch die Einträge von U bei der Hauptkomponentenanalyse von Wavelettransformierten komplex werden, ist hier ein anderer Ansatz gefragt. Eine einfache Möglichkeit bietet sich dadurch, dass zunächst für die Komponente k

$$\overline{u}_k := \sum_{l=1}^m U_{l,k}$$

gebildet wird. Anhand von \overline{u}_k lassen sich dann die Einträge von U in zwei Klassen (\wedge und \vee) einteilen, in Abhängigkeit davon, ob sie mit \overline{u}_k einen Winkel von weniger oder mehr als 90° einschließen, siehe Abbildung 9.4. Damit können dann die Schwerpunkte getrennt nach den Klassen daraufhin untersucht werden, ob sie sich lateral oder in anterior-posterior-Richtung signifikant verschieben.

Man könnte auch untersuchen, ob sich zum Beispiel die verschiedenen Bedingungen des Experiments auf Minimum, Median und Maximum der Elemente von U auswirken.

Was jedoch nicht funktioniert ist zum Beispiel die Idee, mit Hilfe der Frobenius-Norm eine Art „Global Field Power“ [LS80, Skr89] berechnen zu wollen, denn da U unitär ist, folgt für die Frobeniusnorm dieser Matrix, dass $\|U\|_F = \sqrt{\text{trace}(U^H U)} = \sqrt{m}$ für alle U .

Anschaulich könnte man überdies den Vektor

$$\left(\sum_{k=1}^m |U_{1,k}|, \dots, \sum_{k=1}^m |U_{m,k}| \right)^T = (\|U_{1,\cdot}\|_1, \dots, \|U_{m,\cdot}\|_1)^T$$

dahingehend interpretieren, dass er für jeden Kanal die Diversität des Einflusses der Komponenten angibt⁶ und natürlich ist es dann auch so, dass der Vektor

$$\left(\sum_{k=1}^m |U_{k,1}|, \dots, \sum_{k=1}^m |U_{k,m}| \right) = (\|U_{\cdot,1}\|_1, \dots, \|U_{\cdot,m}\|_1)^T$$

beschreibt, wie diversifiziert die jeweilige Komponente am Gesamtgeschehen der Kanäle beteiligt ist.

Diese letzteren Ansätze haben jedoch alle einen relativ hohen Abstraktionsgrad, so dass sie hier – auch auf Grund der Stichprobengröße und der ohnehin schon vielfältigen Ergebnisse – nicht weiter untersucht werden sollen.

9.2.2 Σ — Dimensionalitätsanalyse

Die Singulärwertzerlegung eignet sich unter anderem hervorragend dazu, den Rang einer Matrix numerisch zu bestimmen [GvL96, S. 72]. Damit kann theoretisch die Dimensionalität eines Signals, das sich nur aus wenigen Hauptkomponenten zusammensetzt, einfach bestimmt werden. Jedoch ist hierbei das Problem, dass im Fall echter Daten die Messfehler oft dazu führen, dass die Matrix vollen Rang hat und keins der σ_k wirklich zu Null wird. Dies ist insbesondere dann ein Problem, wenn zu analysierende Daten beispielsweise mit einer Auflösung von 12 Bit erhoben wurden, da durch die Digitalisierungsfehler der Rang künstlich erhöht werden kann⁷.

⁶Was es in diesem Zusammenhang bedeutet, dass U unitär ist, soll hier nicht näher erörtert werden.

⁷Dies ist auch in einem der weiter unten betrachteten Datensätze der Fall, dessen Dimensionalität von der Konditionszahl der Gewichtungsmatrix für die Matrixwavelet-Transformation abzuhängen schien, obwohl von der Theorie her *mindestens* ein Singulärwert auf jeden Fall hätte 0 sein müssen und auch nicht zu erwarten gewesen wäre, dass ein weiterer zu 0 wird.

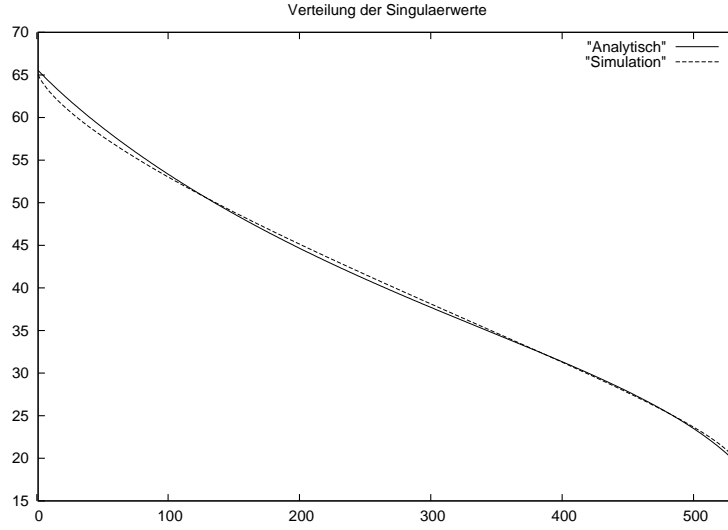


Abbildung 9.5: Schätzung und Simulation der Verteilung der Singulärwerte für eine $N(0, 1)$ -besetzte Zufallsmatrix der Größe 533×1817 . Der Simulation liegt die Mittelung der Singulärwerte über eine Stichprobe von 500 $N(0, 1)$ -besetzten Matrizen zugrunde.

Im Fall zufällig besetzter Matrizen sind alle σ_k fast immer deutlich größer als Null zu erwarten.

Glücklicherweise lässt sich die Verteilung der σ_k für Spezialfälle im Grenzwert angeben [MP99, Formeln 17–19]. Danach verteilen sich in dem Fall, dass die Zeitreihen a_1, \dots, a_m normalverteilt und mittelwertfrei mit Standardabweichung σ sind, die Singulärwerte zwischen den Grenzen

$$\lambda_{\perp}^2 := 2\sigma^2 \left(\frac{m+n}{2} - \sqrt{m \cdot n} \right), \quad \lambda_{\top}^2 := 2\sigma^2 \left(\frac{m+n}{2} + \sqrt{m \cdot n} \right).$$

Die Dichte der Verteilung beträgt dabei

$$p(\lambda) = \frac{1}{\pi\sigma\lambda} \sqrt{(\lambda_{\top}^2 - \lambda^2)(\lambda^2 - \lambda_{\perp}^2)}. \quad (9.1)$$

Durch numerische Integration dieser Dichte – die sowohl für kleine, als auch große reelle *und* komplexe Matrizen eine sehr gute Approximation liefert (Abbildung 9.5) – lässt sich nun bestimmen, ob eine bestimmte Hauptkomponente zu einem Singulärwert σ_k gehört, der noch über der Zufallsschwelle liegt und sich anhand dieses Kriteriums die Dimensionalität eines gegebenen Vektors von Zeitreihen schätzen.

Im Detail ergeben sich methodische Unterschiede zu [MP99]. Für die dort untersuchten Daten lassen sich die kleinsten Singulärwerte der analysierten

Daten recht gut an die theoretisch vorhergesagten anpassen, was für die im Folgenden untersuchten Daten bei der Korrelationsgewichtung nur schlecht gelingt, wie Abbildung 9.6 zeigt. Darüber hinaus ist aus messtechnischen Gründen der kleinste Singulärwert fast gleich 0.

Um eine vergleichbare Kennzahl für *alle* Gewichtungen zu erhalten erscheint es daher besser, von vornherein auf eine solche Anpassung zu verzichten und stattdessen zu untersuchen, wann die Singulärwerte unter die Zufallsschwelle fallen. Es lässt sich dann zwar nicht mehr analysieren, welche Komponenten nur noch residuales Rauschen enthalten, jedoch wird ein Vergleich der Zahl *dominanter* Komponenten für *alle* Gewichtungen ermöglicht.

9.2.3 V^H — Zeit-Frequenz-Schwerpunkte

So wie sich aus der Matrix U ein topographischer Schwerpunkt der Aktivität ableiten lässt, so lässt sich auch aus jeder einzelnen Hauptkomponente ein Schwerpunkt berechnen. Sei dazu $v^k := (V^H)_{k,\cdot} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ die k -te Hauptkomponente und

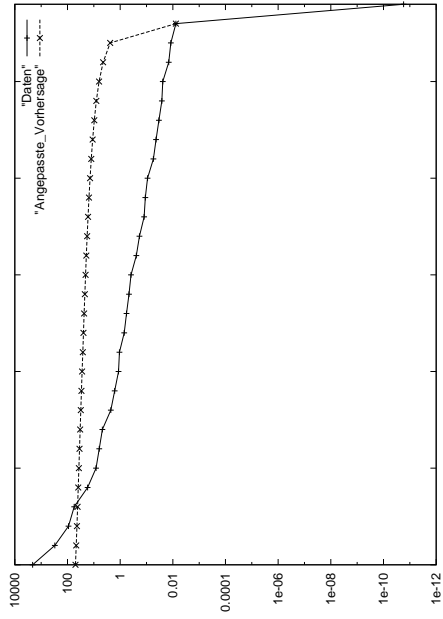
$$\tilde{V}_k := \begin{pmatrix} v_{1,\dots,n}^k \\ \vdots \\ v_{(m-1) \cdot n + 1, \dots, m \cdot n}^k \end{pmatrix}$$

die Umformung von v_k in ein rechteckiges Schema, das von gleicher Dimension ist, wie die ursprünglichen Komponenten der Matrixwavelet-Transformierten. Dann kann aus \tilde{V}_k nach Definition 41 der Schwerpunkt $S(\tilde{V}_k)$ berechnet werden.

Allerdings wird hier kein räumlicher Schwerpunkt beschrieben, sondern die Dimensionen sind hier *Latenz*, also die zeitliche Lokalisierung des Schwerpunkts, sowie *Frequenz*.

Übersicht

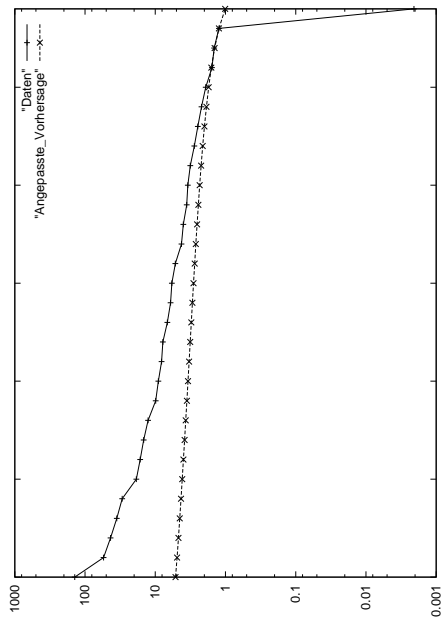
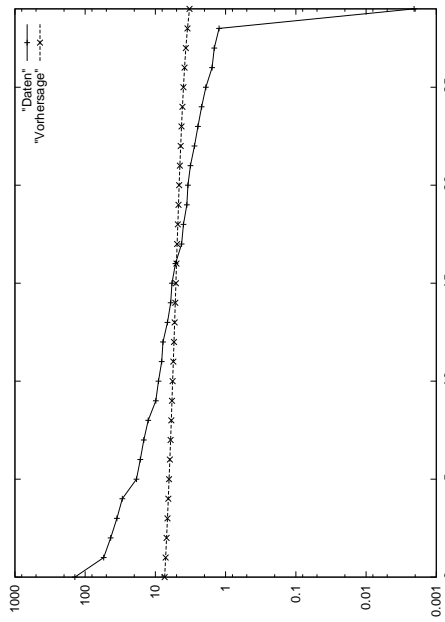
Da die zu untersuchenden Zusammenhänge recht komplex sind, ist in Abbildung 9.7 noch einmal der gesamte Datenfluss für die kommenden Analysen dargestellt. Diese Analysen müssen dann anhand von Bedingungen oder Personengruppen geeignet zu Stichproben zusammengefasst und auf signifikante Unterschiede getestet werden. Die Details der statistischen Auswertung werden in Abschnitt 9.3 dargestellt.



(b) Korrelationsgewichtung, korrigierte Vorhersage.

Abbildung 9.6: Oben: Exemplarische Gegenüberstellung der Singulärwerte zwischen \mathbb{I}_n - und inverser Distanzgewichtung einerseits und der Korrelationsgewichtung andererseits. Während bei ersteren Gewichtungen die Anpassung an die theoretische Vorhersage gut gelingt, ist bei letzterer eine Anpassung nur schlecht möglich.

Unten links: Bei der *unkorrigierten* Vorhersage gibt es eine gewisse Anzahl *dominanter* Komponenten oberhalb der Zufallsschwelle.

(a) \mathbb{I}_n -/inverse Distanzgewichtung, korrigierte Vorhersage,(c) Exemplarisch, *unkorrigierte* Vorhersage.

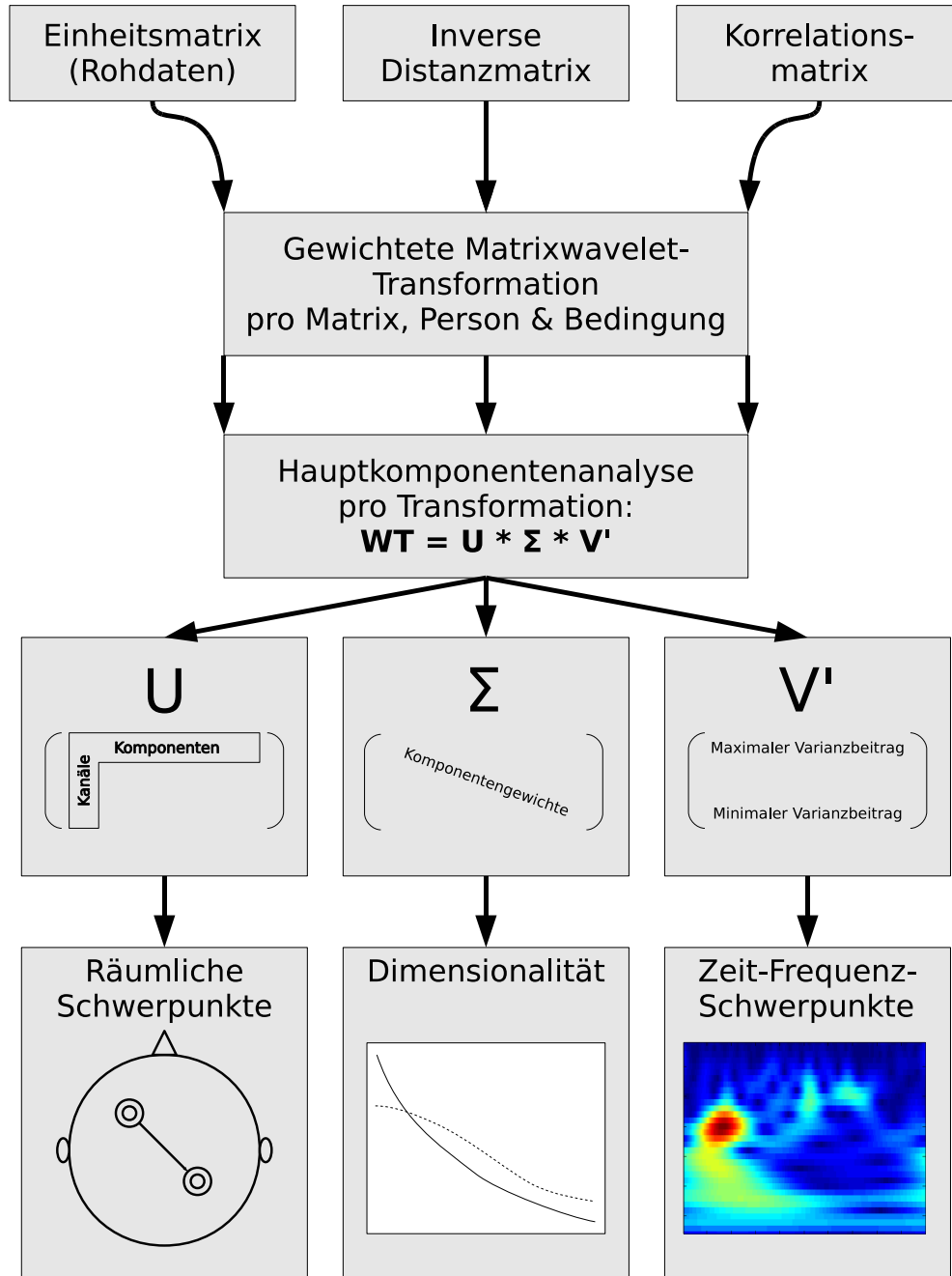


Abbildung 9.7: Datenfluss für die Hauptkomponentenanalyse

9.3 Ergebnisse für ein ausgewähltes Experiment

Die zugrunde liegenden Daten wurden im Rahmen von Experimenten erhoben, bei denen untersucht wurde, inwiefern Bedeutungsunterschiede die elektrische Hirnaktivität beim Lesen von Wörtern beeinflussen [Skr98, SC03]. Für je eine Gruppe aus chinesischen und deutschen Versuchspersonen wurden in der jeweiligen Muttersprache Wörter aus einem dreidimensionalen semantischen Bedeutungsraum gewählt, bei denen eine zusätzliche Voruntersuchung ergeben hatte, dass sie von den Versuchspersonen jeweils *nur auf einer* der drei Dimensionen besonders positiv oder negativ kategorisiert worden waren.

Die drei Bedeutungsdimensionen waren dabei

- *Activity* (*a*) in den Ausprägungen *aktiv* (+) oder *passiv* (-)
- *Evaluation* (*e*) in den Ausprägungen *gut* (+) oder *schlecht* (-) und
- *Potency* (*p*) in den Ausprägungen *stark* (+) oder *schwach* (-).

Die Auswirkungen auf das EEG waren unabhängig von der Muttersprache qualitativ sehr ähnlich [SC03]. Da die quantitativen Unterschiede zwischen den Gruppen jedoch deutlich genug waren, um in sämtlichen statistischen Analysen die chinesischen Versuchspersonen hoch signifikant von den deutschen zu trennen, und zwar quer über alle Bedingungen hinweg, wurden für alle Analysen chinesische und deutsche Teilnehmer zu Stichproben für die jeweiligen Bedingungen gruppiert. Dies ist insofern unproblematisch, da *innerhalb* der jeweiligen Personengruppen die Signifikanzniveaus in der gleichen Größenordnung liegen, wie sie unten für die zusammengefassten Gruppen beschrieben werden.

Für die Interpretation der P-Werte sei hier noch gesagt, dass mit dem Begriff *signifikant* alle P-Werte nicht größer als 0.1 bezeichnet werden, da es vor allem um explorative Datenanalyse mit einer neuen Methode geht und daher nicht unbedingt die gleichen strengen Maßstäbe wie bei standardisierten Testverfahren angelegt werden müssen.

9.3.1 U — Aktivierung und räumliche Schwerpunkte

Es werden hier die Ergebnisse der oben beschriebenen Analyse für die Verschiebung der Aktivitätsschwerpunkte von Komponente 1 beschrieben. Weitere Komponenten werden nicht betrachtet, da sich bereits hier einige signifikante Ergebnisse einstellen und sich mit der Analyse der anderen Komponenten Dutzende von Seiten füllen ließen.

Da die Schwerpunkte metrisch skaliert sind, wird mittels eines einseitigen Mann-Whitney-U-Tests für jede Gewichtungsmatrix untersucht, ob sich unter den Bedingungen des Experiments ihre Lage in anterior-posteriorer oder lateraler Richtung verschiebt. Die Tabellen geben die jeweiligen einseitigen P-Werte dafür an und ein P-Wert von (0.5) 50% bedeutet dabei, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Verschiebung in die eine Richtung gleich groß ist wie für eine Verschiebung in die andere Richtung, dass also wahrscheinlich kein Unterschied besteht.

9.3.1.1 Rohdaten

Verschiebung anterior-posterior

Schwerpunkte von \wedge Tabelle 9.1 zeigt die einseitigen P-Werte für den Vergleich der Schwerpunkte in anterior-posterior-Richtung. Dabei wird in keinem Vergleich ein nennenswertes Signifikanzniveau erreicht.

Tabelle 9.1: Einseitige P-Werte für die anterior-posterior-Verschiebung der Schwerpunkte für die Halbebene \wedge .

$P(\downarrow \text{ weiter vorn als } \rightarrow)$	$a-$	$a+$	$e-$	$e+$	$p-$	$p+$
$a-$	0.50	0.68	0.67	0.70	0.51	0.50
$a+$	0.32	0.50	0.56	0.54	0.28	0.32
$e-$	0.33	0.44	0.50	0.42	0.22	0.27
$e+$	0.30	0.46	0.58	0.50	0.25	0.30
$p-$	0.49	0.72	0.78	0.75	0.50	0.54
$p+$	0.50	0.68	0.73	0.70	0.46	0.50

Schwerpunkte von \vee Tabelle 9.2 zeigt die einseitigen P-Werte für den Vergleich der Schwerpunkte in anterior-posterior-Richtung. Nur ein signifikanter Unterschied tritt auf, siehe Abbildung 9.8.

Tabelle 9.2: Einseitige P-Werte für die anterior-posterior-Verschiebung der Schwerpunkte für die Halbebene \vee .

$P(\downarrow \text{ weiter vorn als } \rightarrow)$	$a-$	$a+$	$e-$	$e+$	$p-$	$p+$
$a-$	0.50	0.83	0.79	0.50	0.40	0.59
$a+$	0.17	0.50	0.38	0.15	0.10	0.24
$e-$	0.21	0.62	0.50	0.21	0.15	0.30
$e+$	0.50	0.85	0.79	0.50	0.39	0.60
$p-$	0.60	0.90	0.85	0.61	0.50	0.73
$p+$	0.41	0.76	0.70	0.40	0.27	0.50

Verschiebung lateral

Schwerpunkte von \wedge Tabelle 9.3 zeigt die einseitigen P-Werte für den Vergleich der Schwerpunkte lateral. Dabei wird wieder in keinem Vergleich ein nennenswertes Signifikanzniveau erreicht.

Tabelle 9.3: Einseitige P-Werte für die laterale Verschiebung der Schwerpunkte für die Halbebene \wedge .

$P(\downarrow \text{ weiter links als } \rightarrow)$	$a-$	$a+$	$e-$	$e+$	$p-$	$p+$
$a-$	0.50	0.57	0.80	0.65	0.47	0.51
$a+$	0.43	0.50	0.75	0.58	0.30	0.41
$e-$	0.20	0.25	0.50	0.32	0.15	0.22
$e+$	0.35	0.42	0.68	0.50	0.32	0.37
$p-$	0.53	0.70	0.85	0.68	0.50	0.58
$p+$	0.49	0.59	0.78	0.63	0.42	0.50

Schwerpunkte von \vee Tabelle 9.4 zeigt die einseitigen P-Werte für den Vergleich der Schwerpunkte lateral. Hier treten zwei signifikante Unterschiede auf, siehe Abbildung 9.8.

Tabelle 9.4: Einseitige P-Werte für die laterale Verschiebung der Schwerpunkte für die Halbebene \vee .

$P(\downarrow \text{ weiter links als } \rightarrow)$	$a-$	$a+$	$e-$	$e+$	$p-$	$p+$
$a-$	0.50	0.09	0.05	0.15	0.17	0.28
$a+$	0.91	0.50	0.39	0.58	0.66	0.79
$e-$	0.95	0.61	0.50	0.70	0.75	0.87
$e+$	0.85	0.42	0.30	0.50	0.55	0.69
$p-$	0.83	0.34	0.25	0.45	0.50	0.67
$p+$	0.72	0.21	0.13	0.31	0.33	0.50

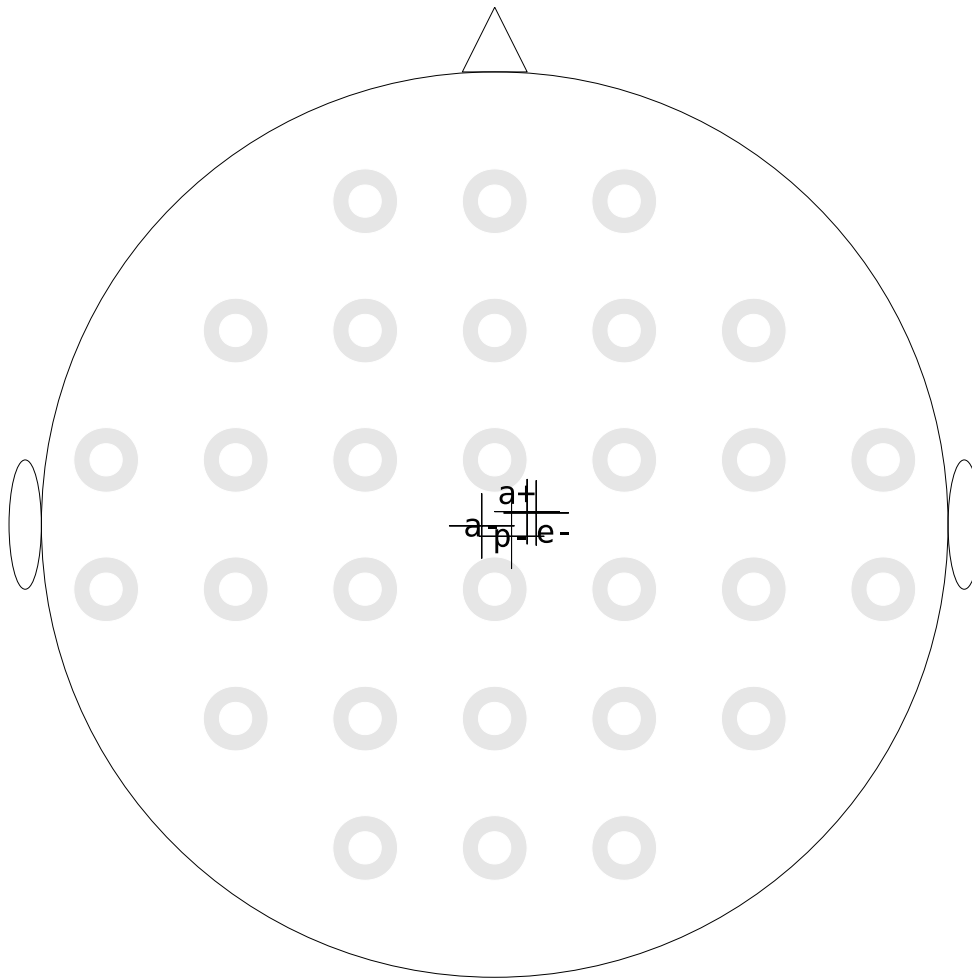


Abbildung 9.8: Übersicht über die Ergebnisse der Analyse der Rohdaten in Abschnitt 9.3.1.1. Nur in der Halbebene \vee sind signifikante Unterschiede zu entdecken, und zwar liegt der Schwerpunkt der Bedingung $a+$ signifikant weiter vorn als der der Bedingung $p-$, der Schwerpunkt der Bedingung $a-$ liegt signifikant weiter links als die Schwerpunkte von $a+$ und $e-$.

9.3.1.2 Inverse Distanzgewichtung

Verschiebung anterior-posterior

Schwerpunkte von \wedge Tabelle 9.5 zeigt die einseitigen P-Werte für den Vergleich der Schwerpunkte in anterior-posterior-Richtung. Hier werden keine nennenswerten Signifikanzen erreicht.

Tabelle 9.5: Einseitige P-Werte für die anterior-posterior-Verschiebung der Schwerpunkte für die Halbebene \wedge .

$P(\downarrow \text{ weiter vorn als } \rightarrow)$	$a-$	$a+$	$e-$	$e+$	$p-$	$p+$
$a-$	0.50	0.41	0.29	0.32	0.51	0.37
$a+$	0.59	0.50	0.32	0.38	0.60	0.42
$e-$	0.71	0.68	0.50	0.50	0.69	0.49
$e+$	0.68	0.62	0.50	0.50	0.64	0.54
$p-$	0.49	0.40	0.31	0.36	0.50	0.38
$p+$	0.63	0.58	0.51	0.46	0.62	0.50

Schwerpunkte von \vee Tabelle 9.6 zeigt die einseitigen P-Werte für den Vergleich der Schwerpunkte in anterior-posterior-Richtung. Es werden sechs signifikante Unterschiede ermittelt, siehe Abbildung 9.10.

Tabelle 9.6: Einseitige P-Werte für die anterior-posterior-Verschiebung der Schwerpunkte für die Halbebene \vee .

$P(\downarrow \text{ weiter vorn als } \rightarrow)$	$a-$	$a+$	$e-$	$e+$	$p-$	$p+$
$a-$	0.50	0.91	0.96	0.69	0.51	0.54
$a+$	0.09	0.50	0.71	0.18	0.08	0.09
$e-$	0.04	0.29	0.50	0.12	0.06	0.05
$e+$	0.31	0.72	0.88	0.50	0.38	0.35
$p-$	0.49	0.92	0.94	0.62	0.50	0.51
$p+$	0.46	0.91	0.95	0.65	0.49	0.50

Verschiebung lateral

Schwerpunkte von \wedge Tabelle 9.7 zeigt die einseitigen P-Werte für den Vergleich der Schwerpunkte lateral. Es wird ein signifikanter Unterschied ermittelt, siehe Abbildung 9.9.

Tabelle 9.7: Einseitige P-Werte für die laterale Verschiebung der Schwerpunkte für die Halbebene \wedge .

$P(\downarrow \text{ weiter links als } \rightarrow)$	$a-$	$a+$	$e-$	$e+$	$p-$	$p+$
$a-$	0.50	0.39	0.32	0.15	0.42	0.52
$a+$	0.61	0.50	0.53	0.22	0.58	0.66
$e-$	0.68	0.47	0.50	0.20	0.55	0.68
$e+$	0.85	0.78	0.80	0.50	0.86	0.90
$p-$	0.58	0.42	0.45	0.14	0.50	0.63
$p+$	0.48	0.34	0.32	0.10	0.37	0.50

Schwerpunkte von \vee Tabelle 9.8 zeigt die einseitigen P-Werte für den Vergleich der Schwerpunkte lateral. Kein Ergebnis ist signifikant.

Tabelle 9.8: Einseitige P-Werte für die laterale Verschiebung der Schwerpunkte für die Halbebene \vee .

$P(\downarrow \text{ weiter links als } \rightarrow)$	$a-$	$a+$	$e-$	$e+$	$p-$	$p+$
$a-$	0.50	0.86	0.72	0.83	0.38	0.61
$a+$	0.14	0.50	0.33	0.50	0.11	0.28
$e-$	0.28	0.67	0.50	0.61	0.19	0.41
$e+$	0.17	0.50	0.39	0.50	0.16	0.36
$p-$	0.62	0.89	0.81	0.84	0.50	0.75
$p+$	0.39	0.72	0.59	0.64	0.25	0.50

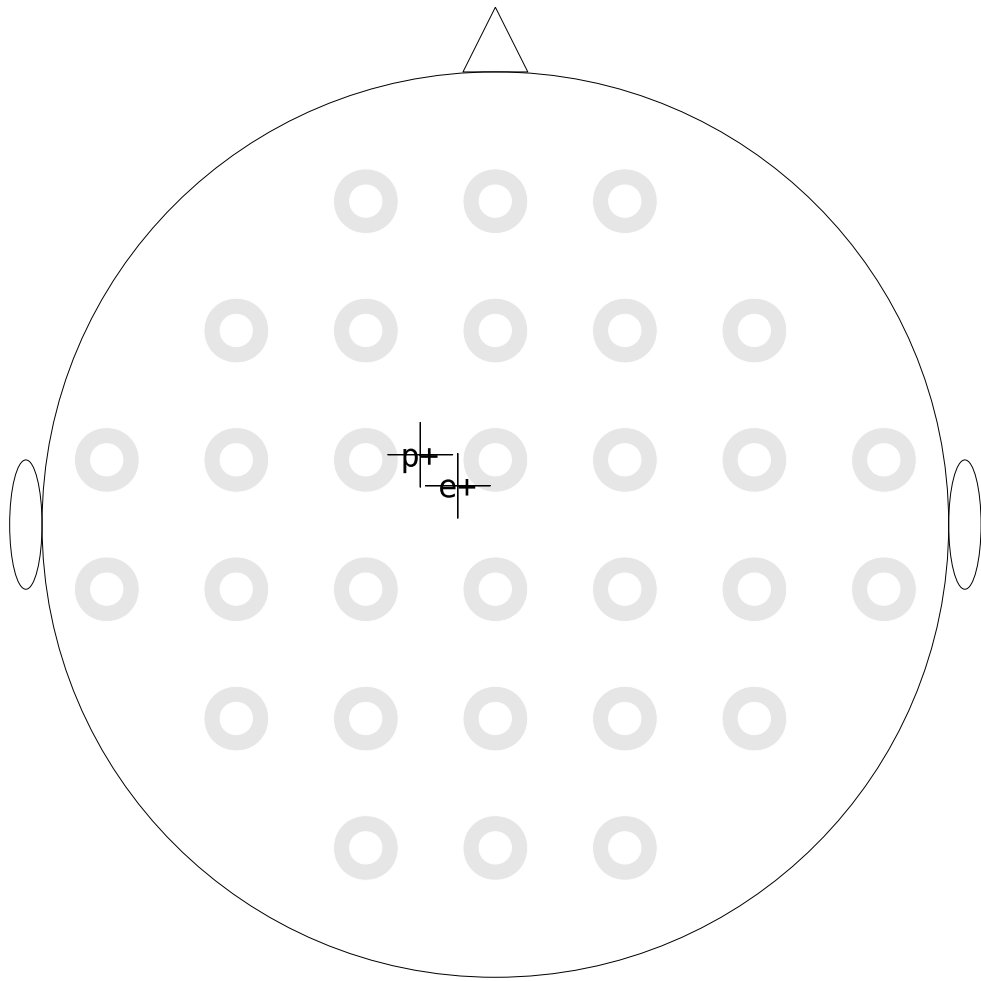


Abbildung 9.9: Übersicht über die Ergebnisse der Analyse mit inverser Distanzgewichtung in Abschnitt 9.3.1.2. In der Halbebene \wedge ist ein signifikanter Unterschied zu entdecken, und zwar liegt der Schwerpunkt der Bedingung $p+$ signifikant weiter links als der Schwerpunkt von $e+$.

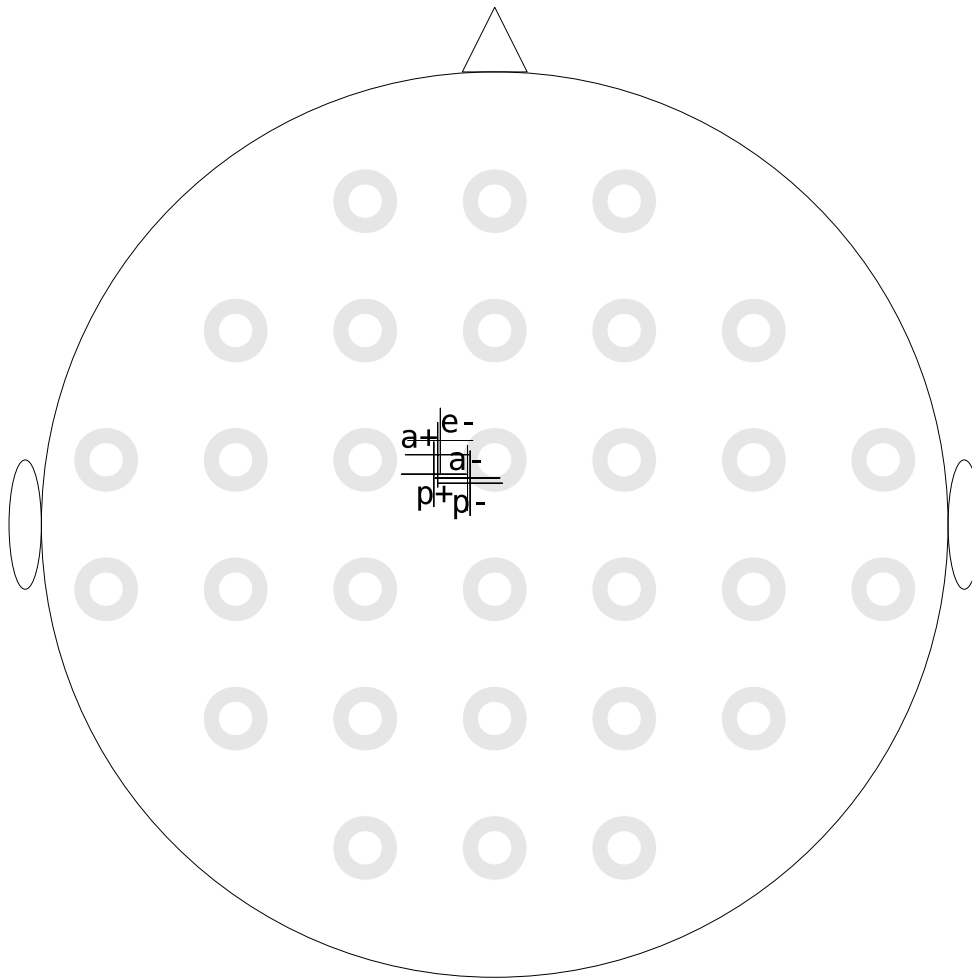


Abbildung 9.10: Übersicht über die Ergebnisse der Analyse mit inverser Distanzgewichtung in Abschnitt 9.3.1.2. In der Halbebene \vee sind sechs signifikante Unterschiede zu entdecken, und zwar liegen die Schwerpunkte der Bedingungen $a+$ und $e-$ signifikant weiter vorn als die Schwerpunkte von $a-$, $p-$ und $p+$.

9.3.1.3 Korrelationsgewichtung

Verschiebung anterior-posterior

Schwerpunkte von \wedge Tabelle 9.9 zeigt die einseitigen P-Werte für den Vergleich der Schwerpunkte in anterior-posterior-Richtung. Es wird ein einziger signifikanter Unterschied ermittelt, siehe Abbildung 9.11.

Tabelle 9.9: Einseitige P-Werte für die anterior-posterior-Verschiebung der Schwerpunkte für die Halbebene \wedge .

$P(\downarrow \text{ weiter vorn als } \rightarrow)$	$a-$	$a+$	$e-$	$e+$	$p-$	$p+$
$a-$	0.50	0.05	0.13	0.23	0.25	0.26
$a+$	0.95	0.50	0.68	0.82	0.85	0.85
$e-$	0.87	0.32	0.50	0.66	0.71	0.74
$e+$	0.77	0.18	0.34	0.50	0.56	0.54
$p-$	0.75	0.15	0.29	0.44	0.50	0.55
$p+$	0.74	0.15	0.26	0.46	0.45	0.50

Schwerpunkte von \vee Tabelle 9.10 zeigt die einseitigen P-Werte für den Vergleich der Schwerpunkte in anterior-posterior-Richtung. Auch hier wird eine einzige hohe Signifikanz ermittelt, siehe Abbildung 9.11.

Tabelle 9.10: Einseitige P-Werte für die anterior-posterior-Verschiebung der Schwerpunkte für die Halbebene \vee .

$P(\downarrow \text{ weiter vorn als } \rightarrow)$	$a-$	$a+$	$e-$	$e+$	$p-$	$p+$
$a-$	0.50	0.31	0.34	0.33	0.22	0.06
$a+$	0.69	0.50	0.54	0.47	0.43	0.13
$e-$	0.66	0.46	0.50	0.47	0.36	0.13
$e+$	0.67	0.53	0.53	0.50	0.40	0.16
$p-$	0.78	0.57	0.64	0.60	0.50	0.19
$p+$	0.94	0.87	0.87	0.84	0.81	0.50

Verschiebung lateral

Schwerpunkte von \wedge Tabelle 9.11 zeigt die einseitigen P-Werte für den Vergleich der Schwerpunkte lateral. Es wird keine einzige nennenswerte Signifikanz ermittelt.

Tabelle 9.11: Einseitige P-Werte für die laterale Verschiebung der Schwerpunkte für die Halbebene \wedge .

$P(\downarrow \text{ weiter links als } \rightarrow)$	$a-$	$a+$	$e-$	$e+$	$p-$	$p+$
$a-$	0.50	0.50	0.67	0.52	0.59	0.50
$a+$	0.50	0.50	0.61	0.52	0.60	0.48
$e-$	0.33	0.39	0.50	0.34	0.44	0.37
$e+$	0.48	0.48	0.66	0.50	0.55	0.46
$p-$	0.41	0.40	0.56	0.45	0.50	0.39
$p+$	0.50	0.52	0.63	0.54	0.61	0.50

Schwerpunkte von \vee Tabelle 9.12 zeigt die einseitigen P-Werte für den Vergleich der Schwerpunkte lateral. Wieder gibt es nur einen Unterschied nennenswerter Signifikanz, siehe Abbildung 9.12.

Tabelle 9.12: Einseitige P-Werte für die laterale Verschiebung der Schwerpunkte für die Halbebene \vee .

$P(\downarrow \text{ weiter links als } \rightarrow)$	$a-$	$a+$	$e-$	$e+$	$p-$	$p+$
$a-$	0.50	0.19	0.46	0.10	0.28	0.16
$a+$	0.81	0.50	0.77	0.36	0.58	0.50
$e-$	0.54	0.23	0.50	0.15	0.32	0.19
$e+$	0.90	0.64	0.85	0.50	0.67	0.63
$p-$	0.72	0.42	0.68	0.33	0.50	0.38
$p+$	0.84	0.50	0.81	0.37	0.62	0.50

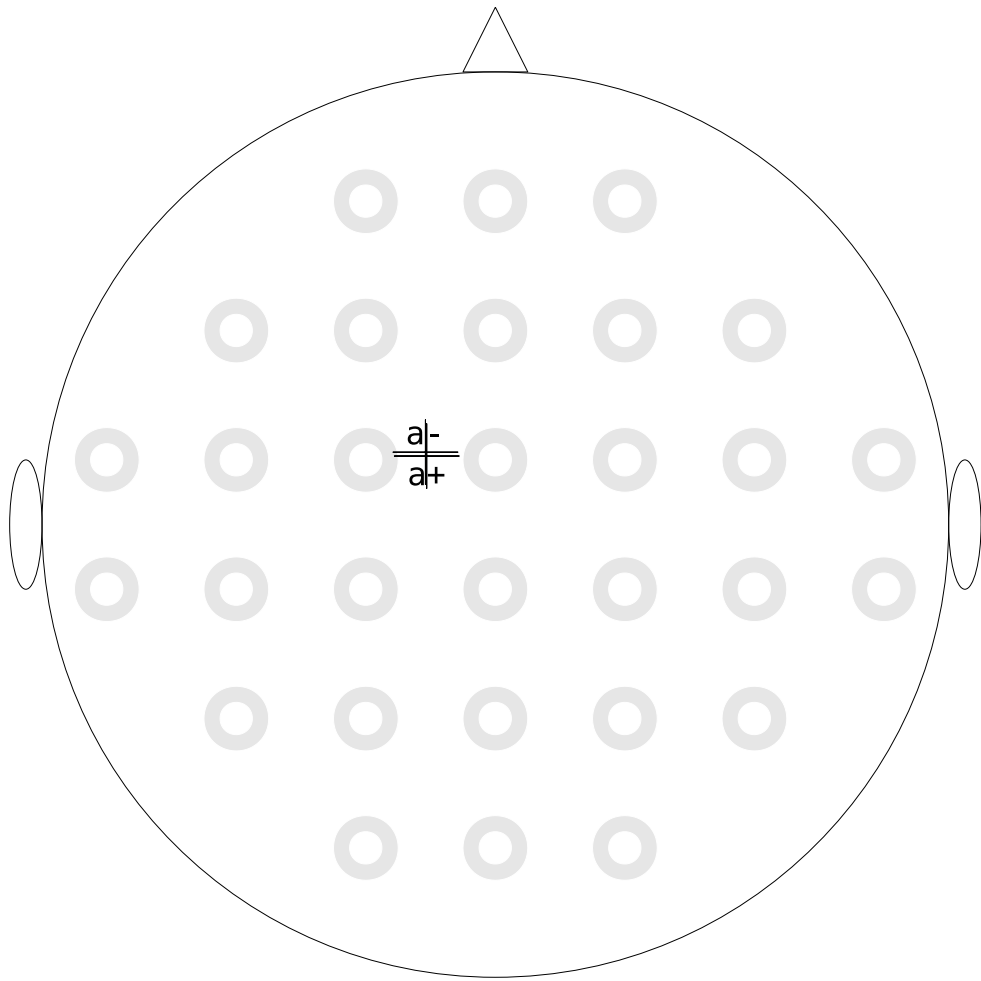


Abbildung 9.11: Halbebene \wedge : Nur der Vergleich von $a-$ und $a+$ zeigt eine hohe Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Schwerpunkt von $a-$ weiter vorn liegt.

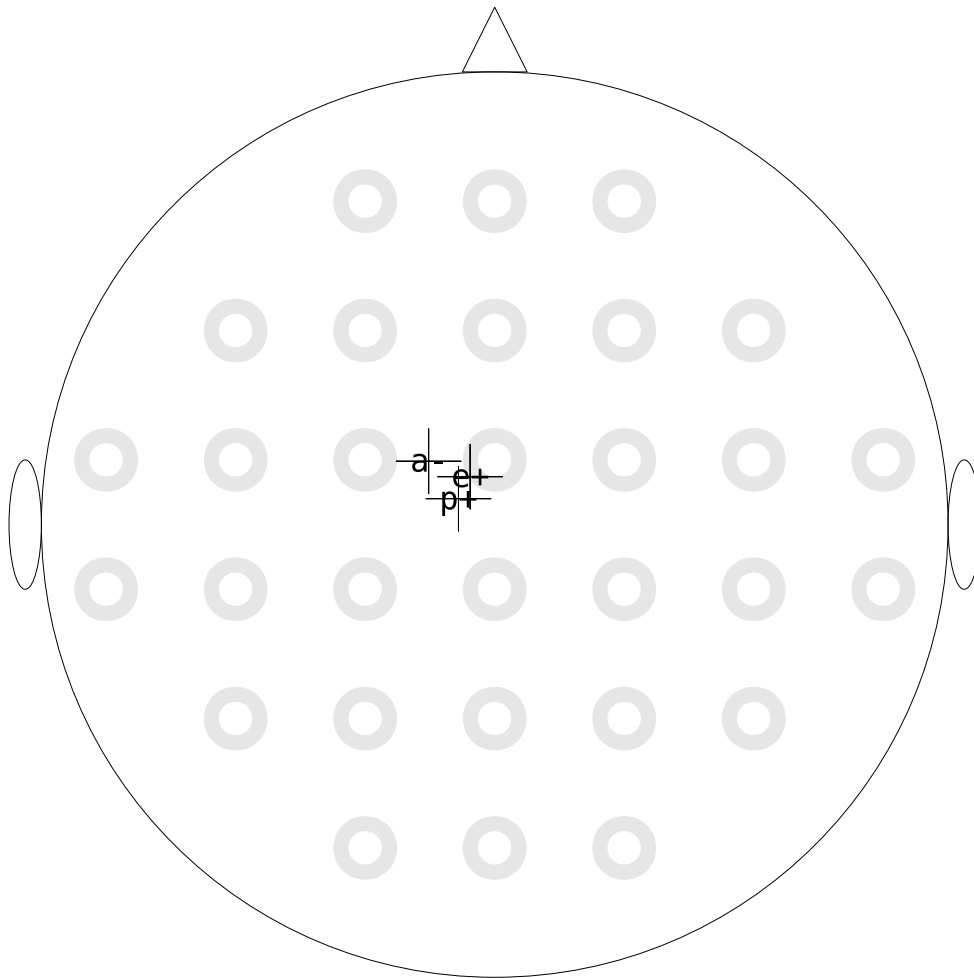


Abbildung 9.12: Halbebene \vee : Der Schwerpunkt von a^- liegt signifikant weiter vorn als der Schwerpunkte von p^+ und signifikant weiter links als der von e^+ .

Tabelle 9.13: Unter den einzelnen Gewichtungen festgestellte signifikante Verschiebungen

	Lateral	Anterior-posterior
Rohdaten	2	1
Inverse Distanzgewichtung	1	6
Korrelationsgewichtung	1	2

Kritische Bewertung der Ergebnisse

Die Ergebnisse der verschiedenen Gewichtungen sind inkonsistent, wie Tabelle 9.13 zeigt. Am häufigsten werden Verschiebungen in anterior-posterior-Richtung festgestellt, und zwar unter der Distanzgewichtung viel häufiger als unter den anderen Gewichtungen. Lateral werden von allen Gewichtungen nur wenige signifikante Verschiebungen festgestellt, von denen auf Grund ihrer geringen Anzahl nicht ausgeschlossen werden kann, dass es sich um Zufallsbefunde handelt.

Unter allen Gewichtungen schneidet die inverse Distanzgewichtung noch am besten ab, während es zwischen Korrelationsgewichtung und Rohdaten kaum einen Unterschied gibt. Ob dieser Vorsprung wirklich daraus resultiert, dass die inverse Distanzgewichtung die elektrischen Zusammenhänge gut modelliert, wäre in weiteren Experimenten zu prüfen.

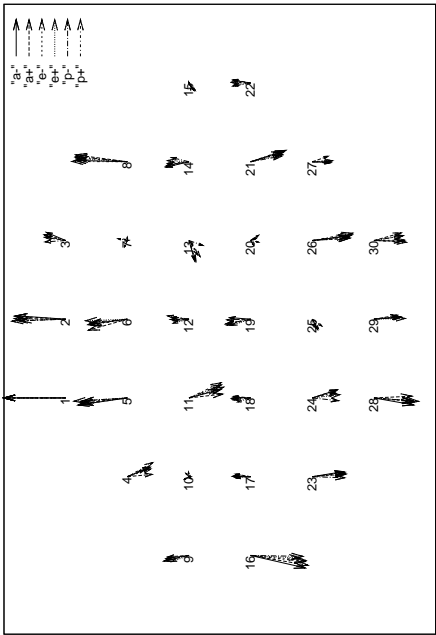
Man hätte darüber hinaus erwarten können, dass die Rohgewichtung besser abschneidet als die Korrelationsgewichtung, denn letztere nimmt keinerlei Rücksicht auf den geometrischen Kontext der Kanäle.

Trotz der Vielfältigkeit der Ergebnisse unter den drei an sich grundverschiedenen Gewichtungen überrascht es jedoch, dass die Aktivierungsmuster, die in Abbildung 9.13 dargestellt sind, sich so ähnlich sehen, dass man schon beinahe von *Invarianz* sprechen könnte.

Außerdem bliebe noch zu prüfen, ob die Aufteilung der komplexen Ebene anhand des Wertes von $\overline{u_k}$ sinnvoll ist, da dieser höchstwahrscheinlich auch innerhalb des Experiments noch von den einzelnen Bedingungen beeinflusst wird und daher die Halbebene \wedge der einen Bedingung ohne Weiteres der Halbebene \vee einer anderen Bedingung entsprechen kann.

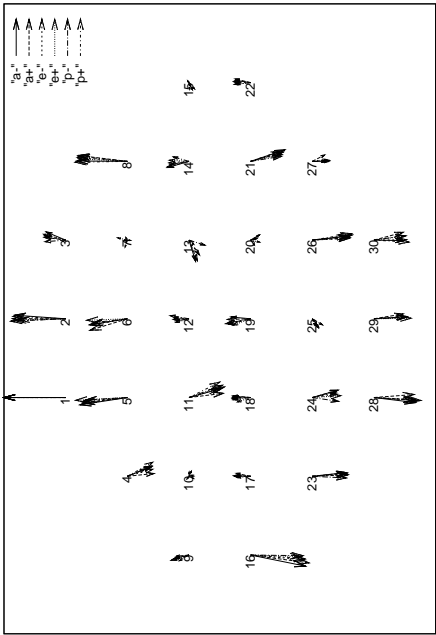
Vergleich mit den Analyseergebnissen aus der Originalarbeit

Zunächst bleibt zu bemerken, dass eine Vergleichbarkeit mit den Ergebnissen der Originalarbeit [SC03] nur sehr eingeschränkt möglich ist, da dort die Analyse im klassischen Kontext positiver und negativer Schwerpunkte erfolgt. Die oben beschriebene Trennung der komplexen Zahlenebene in zwei Halbebenen

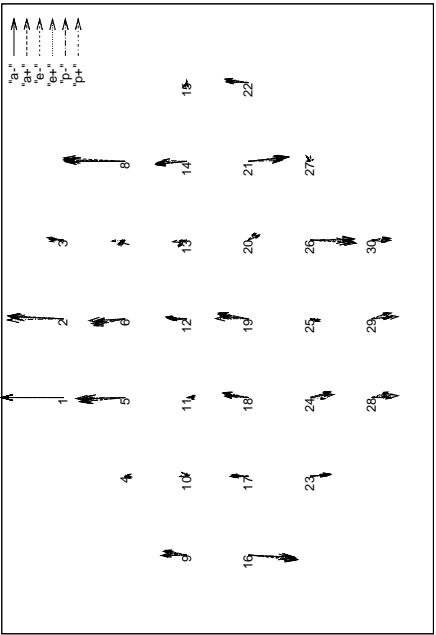


(b) Inverse Distanzgewichtung

Abbildung 9.13: Aktivierungsmuster der Komponente 1 unter den verschiedenen Gewichtungen. Jedem Kanal ist eine komplexe Zahl zugeordnet, die man von der jeweiligen Kanalposition aus als Vektor abtragen kann. Das Maximum der Längen ist jeweils zu 1 normiert, was Normierungsfaktoren von $1/8$ bis $1/9$ entspricht, aber auch nach der Normierung bleiben die Muster zu allen Bedingungen sehr ähnlich. Zur besseren Übersicht zeigen die *negativen reellen Achsen nach oben* und die *positiven imaginären Achsen nach rechts*, so dass die meisten Pfeile aus dem Vektorfeld heraus zeigen.



(a) Rohdaten



(c) Korrelationsgewichtung

anhand der mittleren Komponentenaktivität ist deutlich abstrakter, so dass eine Vergleichbarkeit zunächst nicht gegeben ist.

Für einen vorsichtigen Vergleich kämen [SC03, Fig. 3C, 3D] und [Skr98, Fig. 3B, 3C] in Frage, wobei dort die Befunde für den Zeitbereich von 130ms–195ms, beziehungsweise 80ms–130ms nach dem Trigger dargestellt werden, während die hier vorgenommene Analyse den gesamten Zeitbereich von 0ms–1000ms abdeckt, was die Vergleichbarkeit deutlich einschränkt.

Trotzdem zeigt sich in der Analyse der Rohdaten für die Halbebene \vee , dass der Schwerpunkt von $a+$ weiter vorn liegt als der von $p-$, was parallel zu dem Befund aus [SC03, Fig. 3C] liegt, dass die negativen Schwerpunkte von $a+$ am weitesten vorn liegen. Auch für die inverse Distanzgewichtung wird für die Halbebene \vee eine signifikante Verlagerung des Schwerpunkts von $a+$ nach vorn festgestellt, während in der Korrelationsgewichtung der Schwerpunkt von $a-$ für beide Halbebenen signifikant weiter vorn liegt, als der Schwerpunkt von $a+$, beziehungsweise $p+$.

Für die signifikanten lateralen Verschiebungen lassen sich jedoch kaum Analogien zu [SC03, Fig. 3D] finden, da in der Originalarbeit die Schwerpunkte von links nach rechts in der Reihenfolge E-P-A aufgereiht sind, was den oben beschriebenen Befunden widerspricht, dass Schwerpunkte, sowohl von $e+$, als auch von $e-$ signifikant weiter rechts liegen als andere Schwerpunkte.

Hinsichtlich [Skr98, Fig. 3B, 3C] ergibt ein dass dort der negative Schwerpunkt von $a-$ weiter links liegt als der von $e-$, analog zum Ergebnis für die Halbebene \vee bei den Rohdaten und dass dort der positive Schwerpunkt von $a-$ weiter links liegt als der von $e+$, analog zum Ergebnis für die Halbebene \vee bei der Korrelationsgewichtung.

Auch ein Vergleich der anterior-posterior Verschiebung mit [Skr98, Fig. 7] ergibt ein teils widersprüchliches Bild, so dass letztendlich festgehalten werden kann, dass eine Vergleichbarkeit der Ergebnisse für eine Einteilung in komplexe Halbebenen \vee und \wedge mit der klassischen Einteilung in positive und negative Schwerpunkte wahrscheinlich nicht gegeben ist.

9.3.2 Σ — Dimensionalitätsanalyse

Für jede Bedingung und Versuchsperson wurde zunächst mit Hilfe von Formel 9.1 der Index des ersten Singulärwerts bestimmt, der kleiner oder gleich der oben beschriebenen Zufallsschwelle ist. Diese Indices wurden pro Bedingung über alle Versuchspersonen zusammengefasst und dienten dann als Stichprobe für einen Vergleich auf Homogenität der Verteilung mittels eines einseitigen Vorzeichentests. Getestet wird also, ob unter der jeweiligen Gewichtung das Unterschreiten der Zufallsschwelle bei einer bestimmten Bedingung früher erfolgt als bei den anderen. Darüber hinaus nutzt der Vorzeichentest aus, dass die Stichproben über die Versuchspersonen verbunden sind.

Die Ergebnisse sind in Tabelle 9.14 aufgeführt. Es ist hierbei zu beachten, dass auf Grund der aus dem groben Skalenniveaus resultierenden diskreten Verteilung für die Matrix P der Wahrscheinlichkeitswerte – im Gegensatz zu den Matrizen für U und V – die Gleichung $P + P' = \mathbb{I}$ *nicht* gilt und dass die Einträge auf der Diagonalen 1.00 (100%) sind. Es kommt durch diesen Symmetriebruch zu Inkonsistenzen in der Interpretation, da der Vergleich zwischen zwei Kategorien x und y einen Wert kleiner oder gleich 0.1 erreichen kann, obwohl der Vergleich zwischen y und x einen Wert kleiner oder gleich 0.9 erreicht. Trotzdem oder besser gesagt *deshalb* werden auch für diesen Abschnitt nur P-Werte als signifikant eingestuft, die kleiner oder gleich 0.1 sind.

9.3.2.1 Rohdaten

Die Tabelle zeigt signifikante Werte dafür, dass die Dimensionalität bei der Bedingung $a-$ geringer ist als bei $e-$, bei $e+$ geringer als bei $a+$ und $e-$, bei der Bedingung $p-$ geringer als bei beiden Bedingungen der Kategorie a und der Bedingung $e-$ und darüber hinaus bei der Bedingung $p+$ niedriger als bei $e-$.

9.3.2.2 Inverse Distanzgewichtung

Für diese Gewichtung zeigt die Tabelle signifikante Ergebnisse dafür, dass die Dimensionalität unter beiden Bedingungen der Kategorie p und auch unter der Bedingung $e+$ die Dimensionalität geringer ist als unter den Bedingungen der Kategorie a und der Bedingung $e-$.

9.3.2.3 Korrelationsgewichtung

Für die Korrelationsgewichtung letztlich verschwinden die meisten signifikanten Unterschiede, nur die Dimensionalität der Bedingungen $e+$ und $p+$ wird

als signifikant niedriger eingestuft als bei e .

Abbildung 9.14 zeigt die Verteilung der Minima, Mediane und Maxima über die Gewichtungen und Bedingungen hinweg. Es fällt auf, dass die Spreizung der Parameter bei Rohdaten und inverser Distanzgewichtung relativ groß ist, während sie bei der Korrelationsgewichtung deutlich kleiner ausfällt.

Bei der Korrelationsgewichtung zeigt sich überdies, dass alle Mediane viel niedriger liegen als bei den anderen Gewichtungen. Allerdings erfüllt sich hier die Hoffnung nicht, dass man diese Eigenschaft ohne Weiteres zur Datenkompression nutzen könnte, denn lässt man vermeintlich unwichtige Komponenten der Reihe nach weg so zeigt sich, dass sich die Approximationsgüte der Rekonstruktion weder in der ∞ - noch in der 2-Norm besser als bei anderen Gewichtungen ist [AK09].

Kritische Bewertung der Ergebnisse

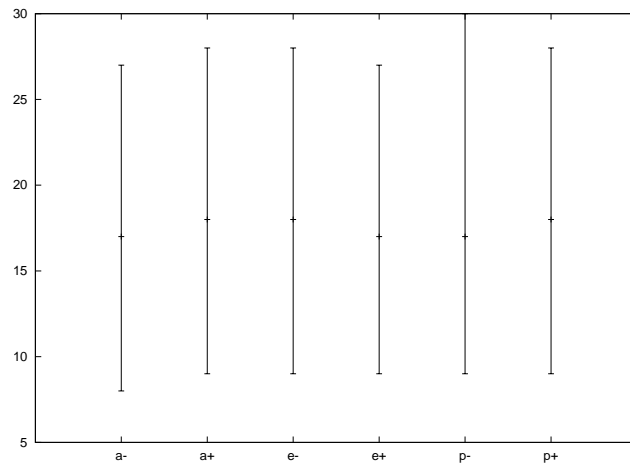
Die Anzahl der signifikanten Unterschiede in der Dimensionalität ist bei der Korrelationsgewichtung mit Abstand am geringsten. Hier treten nur zwei signifikante Unterschiede auf, im Gegensatz zur inversen Distanzgewichtung (9 signifikante Unterschiede) und den Rohdaten (7 signifikante Unterschiede). Es bliebe noch zu untersuchen, ob es sich hier um einen systematischen Effekt handelt, insbesondere unter dem Aspekt, dass sich – wie auch Abbildung 9.14 zeigt – sowohl die Spreizung als auch die Mediane des Unterschreitens der Zufallsschwelle unter dieser Gewichtung *deutlich* verringern. Andererseits bliebe noch zu untersuchen, ob die Vorhersage der Verteilung für die Singulärwerte für die Korrelationsgewichtung überhaupt brauchbare Ergebnisse liefert. Ein Vergleich mit der Originalarbeit kann nicht durchgeführt werden, da dort keine Dimensionalitäten untersucht wurden.

Tabelle 9.14: Einseitige P-Werte für den Test auf gleiche Dimensionalität anhand des Unterschreitens der Zufallsschwelle.

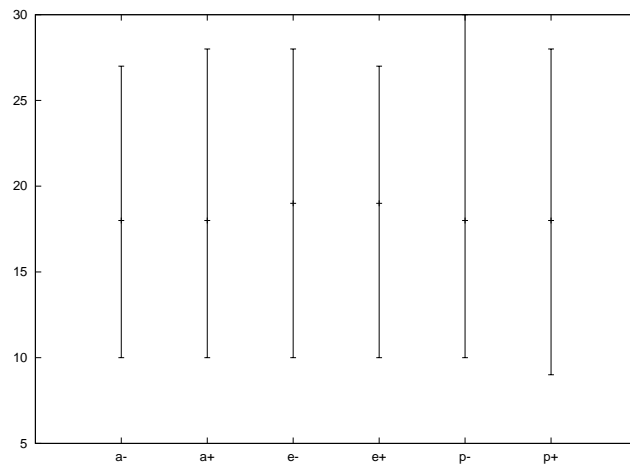
Rohdaten Dimension von ↓ kleiner als von →	$a-$	$a+$	$e-$	$e+$	$p-$	$p+$
$a-$	1.00	0.35	0.07	0.89	1.00	0.71
$a+$	0.78	1.00	0.30	0.97	1.00	0.93
$e-$	0.97	0.81	1.00	1.00	1.00	1.00
$e+$	0.19	0.06	0.01	1.00	0.83	0.29
$p-$	0.01	0.00	0.00	0.29	1.00	0.20
$p+$	0.43	0.14	0.00	0.83	0.89	1.00

Inverse Distanzgewichtung Dimension von ↓ kleiner als von →	$a-$	$a+$	$e-$	$e+$	$p-$	$p+$
$a-$	1.00	0.28	0.12	0.96	1.00	0.96
$a+$	0.84	1.00	0.13	0.98	1.00	0.95
$e-$	0.94	0.93	1.00	1.00	1.00	1.00
$e+$	0.09	0.05	0.00	1.00	0.78	0.29
$p-$	0.00	0.00	0.00	0.35	1.00	0.17
$p+$	0.09	0.10	0.00	0.82	0.91	1.00

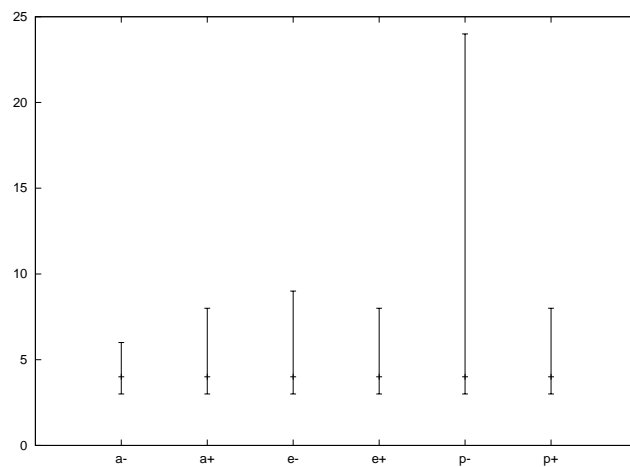
Korrelationsgewichtung Dimension von ↓ kleiner als von →	$a-$	$a+$	$e-$	$e+$	$p-$	$p+$
$a-$	1.00	0.50	0.40	0.85	0.76	0.89
$a+$	0.69	1.00	0.13	0.89	0.83	0.93
$e-$	0.77	0.95	1.00	0.98	0.92	0.97
$e+$	0.30	0.23	0.07	1.00	0.61	0.71
$p-$	0.41	0.31	0.18	0.61	1.00	0.68
$p+$	0.23	0.17	0.08	0.50	0.50	1.00



(a) Rohdaten



(b) Distanzgewichtung



(c) Korrelationsgewichtung

Abbildung 9.14: Minima, Mediane und Maxima des Unterschreitens der Zufallsschwelle für die verschiedenen Gewichtungen und Bedingungen.

9.3.3 V^T — Zeit-Frequenz-Schwerpunkte der ersten Komponente

Wiederum wäre eine Betrachtung aller 30 Komponenten unter allen Bedingungen und Gewichtungen möglich, so dass auch hier nur auf die erste Komponente eingegangen wird.

Für jede erste Komponente wird dabei der Schwerpunkt berechnet und mittels eines einseitigen Mann-Whitney-U-Tests für jede Gewichtungsmatrix untersucht, ob sich unter den Bedingungen des Experiments die Latenz oder Frequenz ändert. Die Tabellen geben die jeweiligen einseitigen P-Werte an, und wie schon bei der Matrix U bedeutet ein P-Wert von 0.5 (50%), dass die Wahrscheinlichkeit für eine Verschiebung in die eine Richtung gleich groß ist wie für eine Verschiebung in die andere Richtung, dass also wahrscheinlich kein Unterschied besteht.

Wie schon in Bemerkung 11 beschrieben, ist der Mittelwert der Schwerpunkte über die einzelnen Versuchspersonen *verschieden* von dem Schwerpunkt der über die Versuchspersonen gemittelten Komponenten. Daher ergeben sich Diskrepanzen zwischen den folgenden Tabellen und Abbildungen. Ein signifikant früherer Schwerpunkt nach den Tabellen bedeutet ausdrücklich *nicht*, dass sich dies auch in den Abbildungen der zugehörigen mittleren Komponenten deutlich widerspiegeln muss!

9.3.3.1 Rohdaten

Tabelle 9.15 zeigt die entsprechenden P-Werte getrennt nach Latenz und Frequenz. Die in den Abbildungen angedeutete Ähnlichkeit zeigt schlägt sich auch in den Signifikanzniveaus nieder. Allerdings liegt immerhin der zeitliche Schwerpunkt der Bedingung p - signifikant früher als die Schwerpunkte von a - und e -. Für Unterschiede der Frequenz werden keine nennenswerten Signifikanzniveaus erreicht.

Tabelle 9.15: Einseitige P-Werte für den Vergleich der Schwerpunkte der sechs Bedingungen bei \mathbb{I}_n -Gewichtung.

Latenz ↓ früher als →	a -	a +	e -	e +	p -	p +
a -	0.50	0.64	0.45	0.63	0.92	0.78
a +	0.36	0.50	0.31	0.49	0.86	0.75
e -	0.55	0.69	0.50	0.65	0.96	0.83
e +	0.37	0.51	0.35	0.50	0.89	0.68
p -	0.08	0.14	0.04	0.11	0.50	0.30
p +	0.22	0.25	0.17	0.32	0.70	0.50

Frequenz ↓ höher als →	a -	a +	e -	e +	p -	p +
a -	0.50	0.42	0.33	0.14	0.21	0.41
a +	0.58	0.50	0.42	0.18	0.31	0.46
e -	0.67	0.58	0.50	0.29	0.37	0.59
e +	0.86	0.82	0.71	0.50	0.63	0.73
p -	0.79	0.69	0.63	0.37	0.50	0.64
p +	0.59	0.54	0.41	0.27	0.36	0.50

Die Abbildungen 9.15, 9.16 und 9.17 zeigen die mittleren Schwerpunkte der Komponente 1 über alle Versuchspersonen pro Kategorie und Ausprägung bei der Matrix-Wavelettransformation mit \mathbb{I}_n -Gewichtung, was einfach der kanalweisen skalaren Transformation der Daten entspricht. Obwohl die Beträge der – an sich komplexen – Komponenten selbst recht unterschiedlich aussehen, zeigen sich für die Schwerpunkte nur kleine Unterschiede.

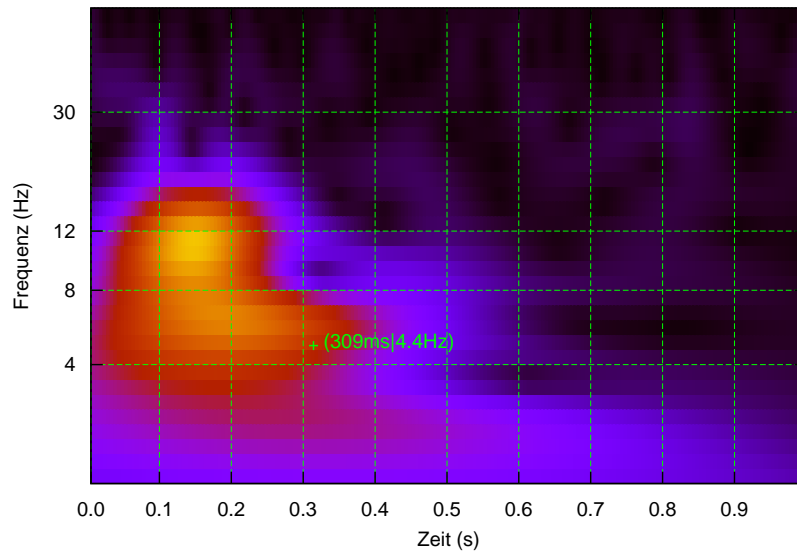
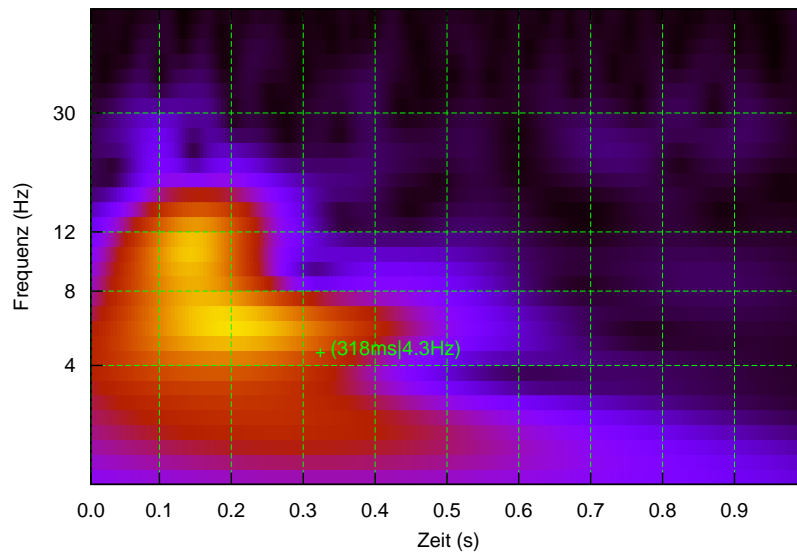
(a) Bedingung $a-$ (b) Bedingung $a+$

Abbildung 9.15: Beträge und Schwerpunkte von Komponente 1 für die Kategorie a bei \mathbb{I}_n -Gewichtung. Die Farbskala der Beträge reicht von schwarz (niedriger Betrag) zu gelb (hoher Betrag), wobei keine Werte angegeben sind, da diese vorwiegend durch die Hauptkomponentenanalyse bestimmt werden.

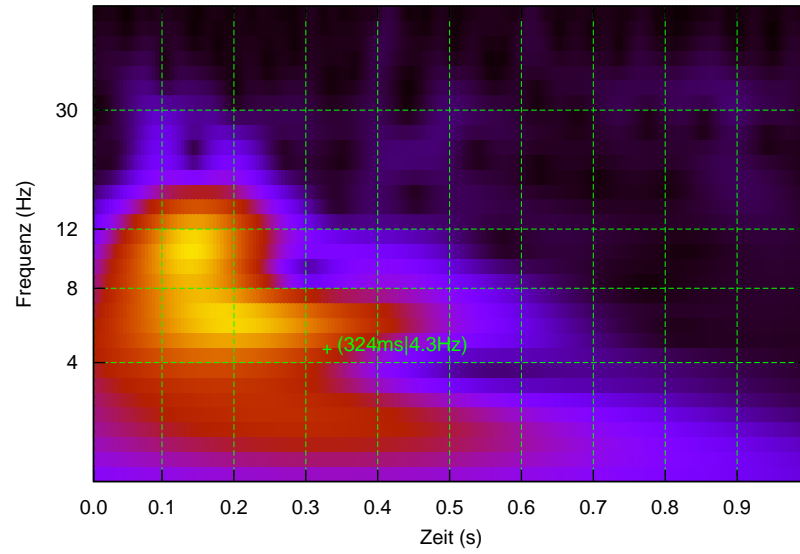
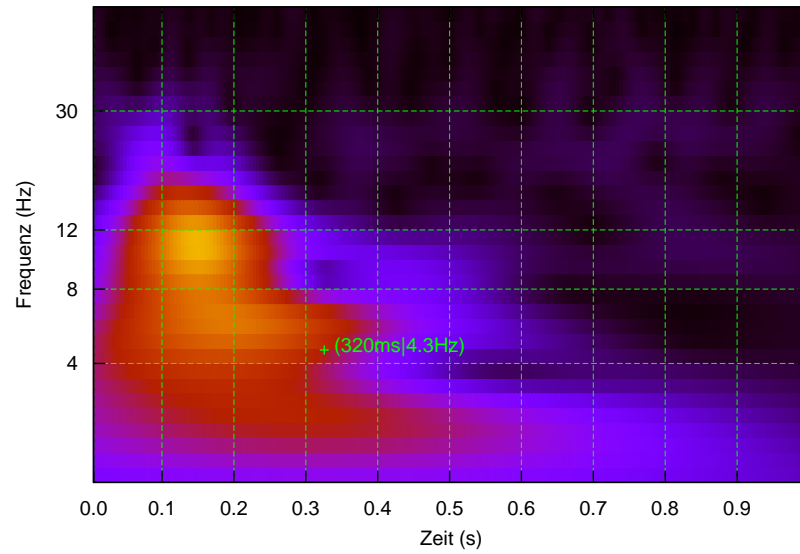
(a) Bedingung $e-$ (b) Bedingung $e+$

Abbildung 9.16: Beträge und Schwerpunkte von Komponente 1 für die Kategorie e bei \mathbb{I}_n -Gewichtung. Die Farbskala der Beträge reicht von schwarz (niedriger Betrag) zu gelb (hoher Betrag), wobei keine Werte angegeben sind, da diese vorwiegend durch die Hauptkomponentenanalyse bestimmt werden.

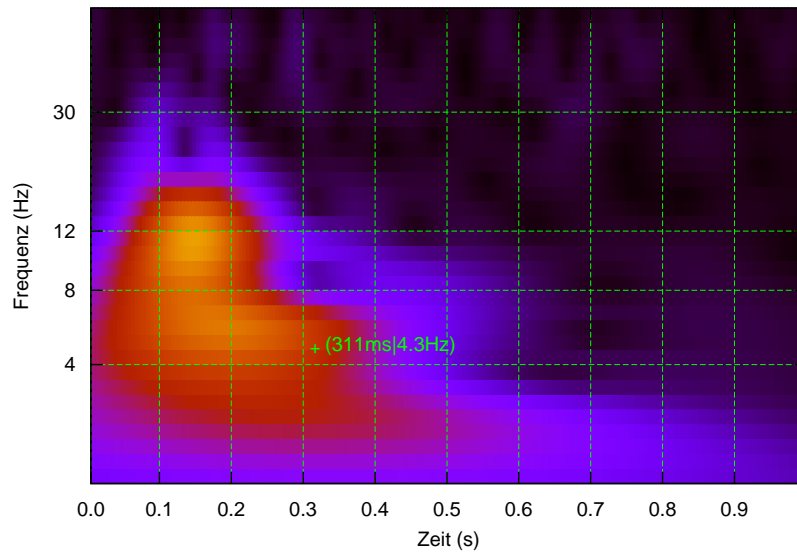
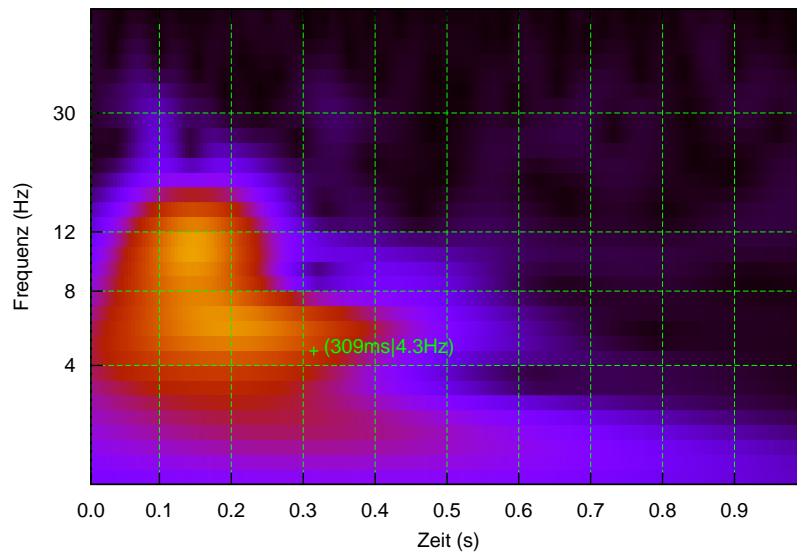
(a) Bedingung $p-$ (b) Bedingung $p+$

Abbildung 9.17: Beträge und Schwerpunkte von Komponente 1 für die Kategorie p bei \mathbb{I}_n -Gewichtung. Die Farbskala der Beträge reicht von schwarz (niedriger Betrag) zu gelb (hoher Betrag), wobei keine Werte angegeben sind, da diese vorwiegend durch die Hauptkomponentenanalyse bestimmt werden.

9.3.3.2 Inverse Distanzgewichtung

Wie vorher wiederholt sich auch bei den Signifikanzniveaus in Tabelle 9.16 das, was die Bilder anzudeuten scheinen: Wiederum liegt der zeitliche Schwerpunkt der Bedingung p - signifikant früher als die Schwerpunkte von a - und e - und es ist kein signifikanter Unterschied der Frequenzen festzustellen. Insgesamt unterscheiden sich die P-Werte für die inverse Distanzgewichtung nur unwesentlich von denen der Rohdaten.

Tabelle 9.16: Einseitige P-Werte für den Vergleich der Schwerpunkte der sechs Bedingungen bei inverser Distanzgewichtung.

Latenz ↓ früher als →	$a-$	$a+$	$e-$	$e+$	$p-$	$p+$
$a-$	0.50	0.66	0.42	0.62	0.91	0.76
$a+$	0.34	0.50	0.29	0.46	0.86	0.70
$e-$	0.58	0.71	0.50	0.67	0.95	0.81
$e+$	0.38	0.54	0.33	0.50	0.89	0.66
$p-$	0.09	0.14	0.05	0.11	0.50	0.27
$p+$	0.24	0.30	0.19	0.34	0.73	0.50

Frequenz ↓ höher als →	$a-$	$a+$	$e-$	$e+$	$p-$	$p+$
$a-$	0.50	0.47	0.32	0.15	0.24	0.39
$a+$	0.53	0.50	0.42	0.19	0.36	0.45
$e-$	0.68	0.58	0.50	0.26	0.41	0.60
$e+$	0.85	0.81	0.74	0.50	0.67	0.76
$p-$	0.76	0.64	0.59	0.33	0.50	0.62
$p+$	0.61	0.55	0.40	0.24	0.38	0.50

Die Abbildungen 9.18, 9.19 und 9.20 zeigen die mittleren Schwerpunkte der Komponente 1 über alle Versuchspersonen pro Kategorie und Ausprägung bei der Matrix-Wavelettransformation mit inverser Distanzgewichtung. Auch hier zeigen sich für die Schwerpunkte nur kleine Unterschiede, obwohl die Beträge der Komponenten sich etwas stärker zu unterscheiden scheinen als bei den Rohdaten.

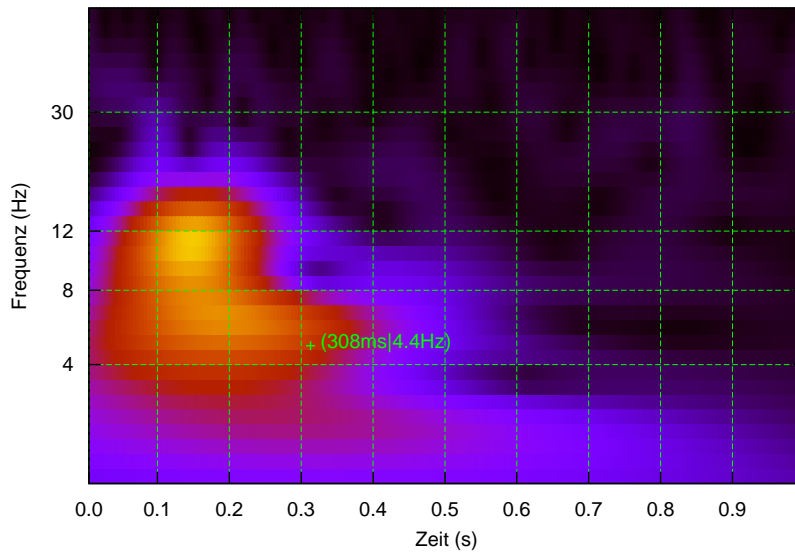
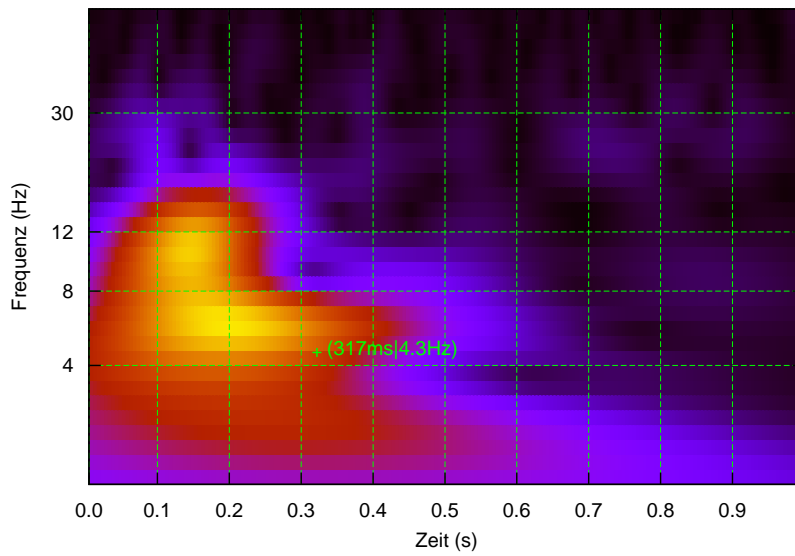
(a) Bedingung $a-$ (b) Bedingung $a+$

Abbildung 9.18: Beträge und Schwerpunkte von Komponente 1 für die Kategorie a bei inverser Distanzgewichtung. Die Farbskala der Beträge reicht von schwarz (niedriger Betrag) zu gelb (hoher Betrag), wobei keine Werte angegeben sind, da diese vorwiegend durch die Hauptkomponentenanalyse bestimmt werden.

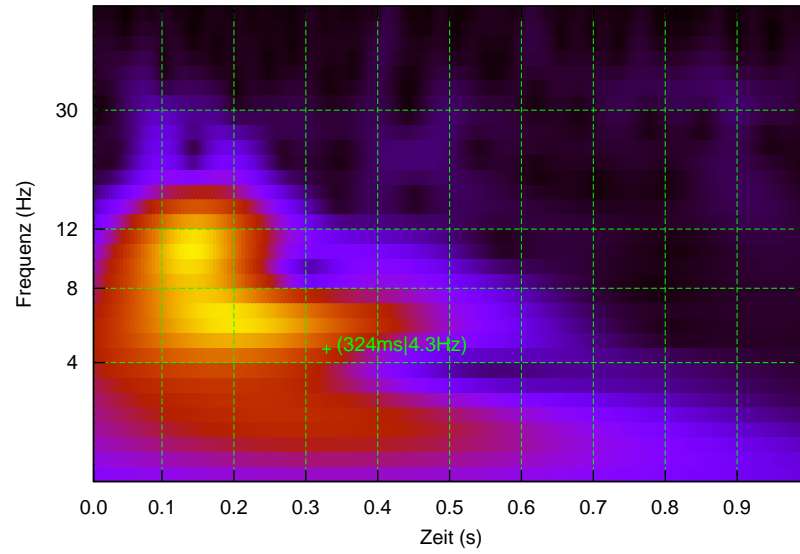
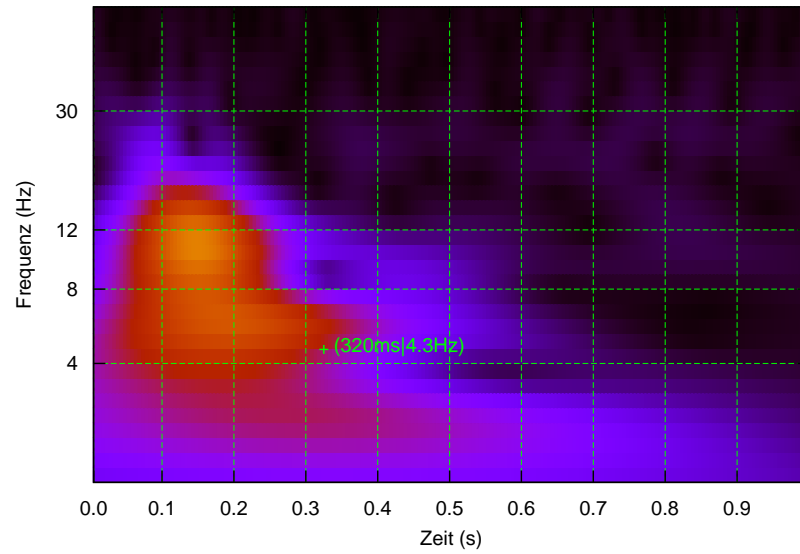
(a) Bedingung $e-$ (b) Bedingung $e+$

Abbildung 9.19: Beträge und Schwerpunkte von Komponente 1 für die Kategorie e bei inverser Distanzgewichtung. Die Farbskala der Beträge reicht von schwarz (niedriger Betrag) zu gelb (hoher Betrag), wobei keine Werte angegeben sind, da diese vorwiegend durch die Hauptkomponentenanalyse bestimmt werden.

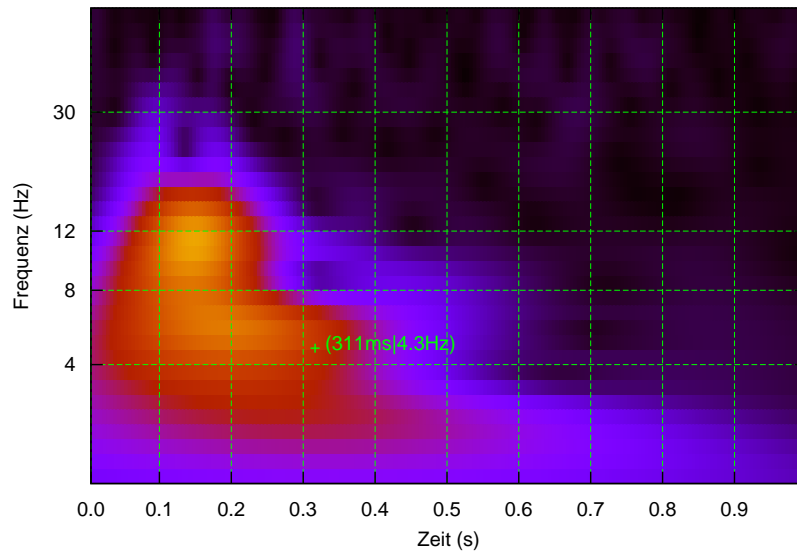
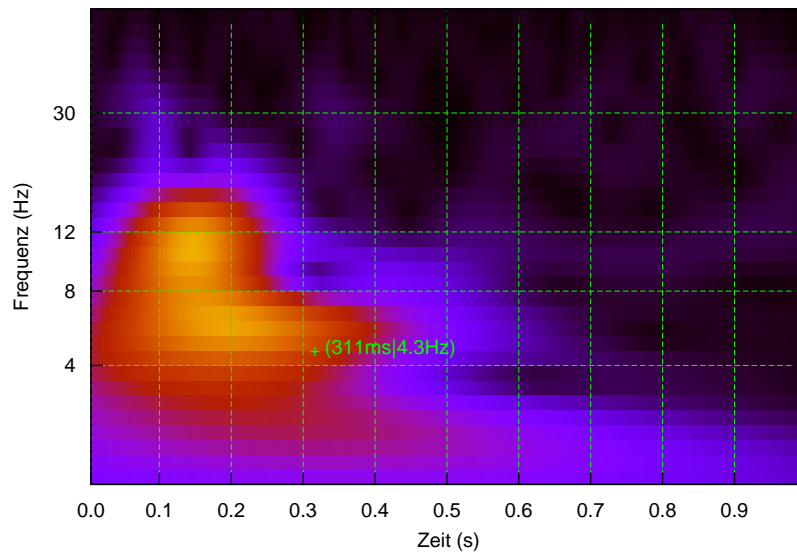
(a) Bedingung $p-$ (b) Bedingung $p+$

Abbildung 9.20: Beträge und Schwerpunkte von Komponente 1 für die Kategorie p bei inverser Distanzgewichtung. Die Farbskala der Beträge reicht von schwarz (niedriger Betrag) zu gelb (hoher Betrag), wobei keine Werte angegeben sind, da diese vorwiegend durch die Hauptkomponentenanalyse bestimmt werden.

9.3.3.3 Korrelationsgewichtung

Die Korrelationsgewichtung offenbart, wie Tabelle 9.17 zeigt, nun immerhin drei signifikante Unterschiede, und zwar ist es auch hier wieder der zeitliche Schwerpunkt der Bedingung p -, der signifikant früher liegt, als die Schwerpunkte von a -, $a+$ und e -. Für die Frequenzen zeigt sich wieder kein signifikanter Unterschied.

Tabelle 9.17: Einseitige P-Werte für den Vergleich der Schwerpunkte der sechs Bedingungen bei Korrelationsgewichtung.

Latenz ↓ früher als →	a -	$a+$	e -	$e+$	p -	$p+$
a -	0.50	0.58	0.42	0.61	0.93	0.73
$a+$	0.42	0.50	0.36	0.57	0.90	0.69
e -	0.58	0.64	0.50	0.63	0.95	0.76
$e+$	0.39	0.43	0.37	0.50	0.89	0.64
p -	0.07	0.10	0.05	0.11	0.50	0.22
$p+$	0.27	0.31	0.24	0.36	0.78	0.50

Frequenz ↓ höher als →	a -	$a+$	e -	$e+$	p -	$p+$
a -	0.50	0.50	0.32	0.16	0.21	0.38
$a+$	0.50	0.50	0.32	0.15	0.20	0.42
e -	0.68	0.68	0.50	0.27	0.29	0.55
$e+$	0.84	0.85	0.73	0.50	0.60	0.78
p -	0.79	0.80	0.71	0.40	0.50	0.74
$p+$	0.62	0.58	0.45	0.22	0.26	0.50

Abschließend zeigen die Abbildungen 9.21, 9.22 und 9.23 die mittleren Schwerpunkte der Komponente 1 für die Gewichtung mit der Korrelationsmatrix. Auch hier wiederholt sich im Wesentlichen, was oben schon zu sehen war.

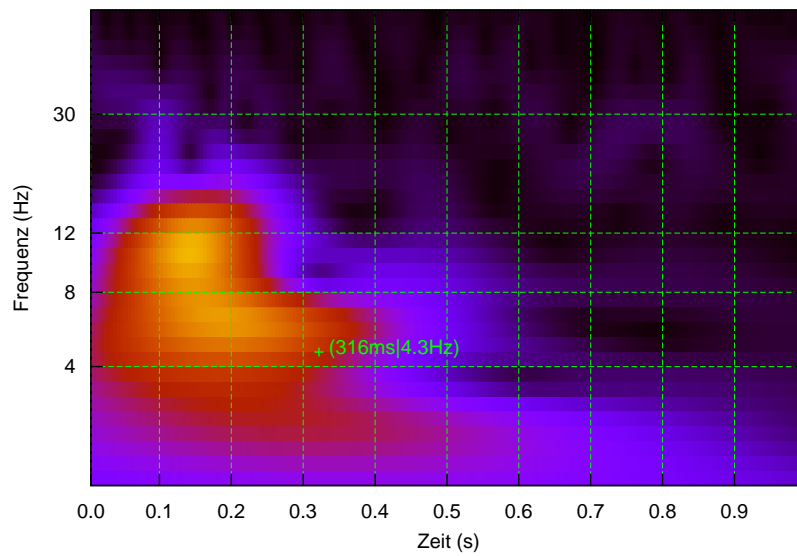
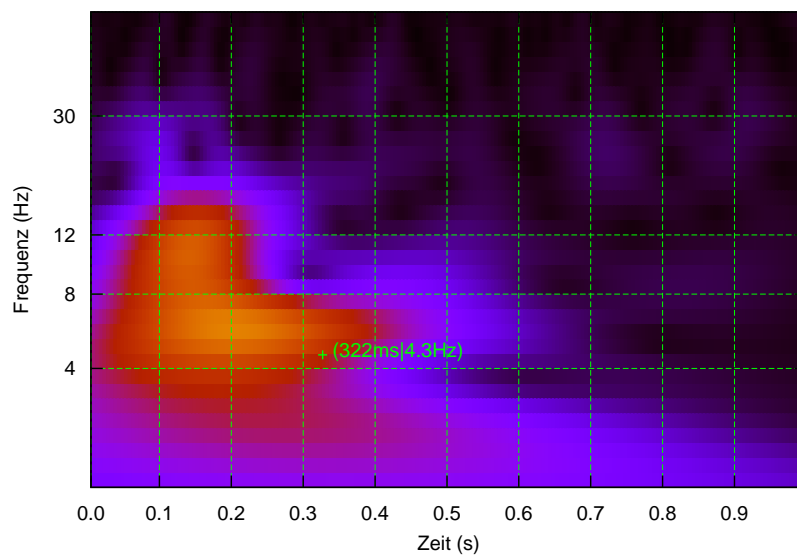
(a) Bedingung $a-$ (b) Bedingung $a+$

Abbildung 9.21: Beträge und Schwerpunkte von Komponente 1 für die Kategorie a bei Korrelationsgewichtung. Die Farbskala der Beträge reicht von schwarz (niedriger Betrag) zu gelb (hoher Betrag), wobei keine Werte angegeben sind, da diese vorwiegend durch die Hauptkomponentenanalyse bestimmt werden.

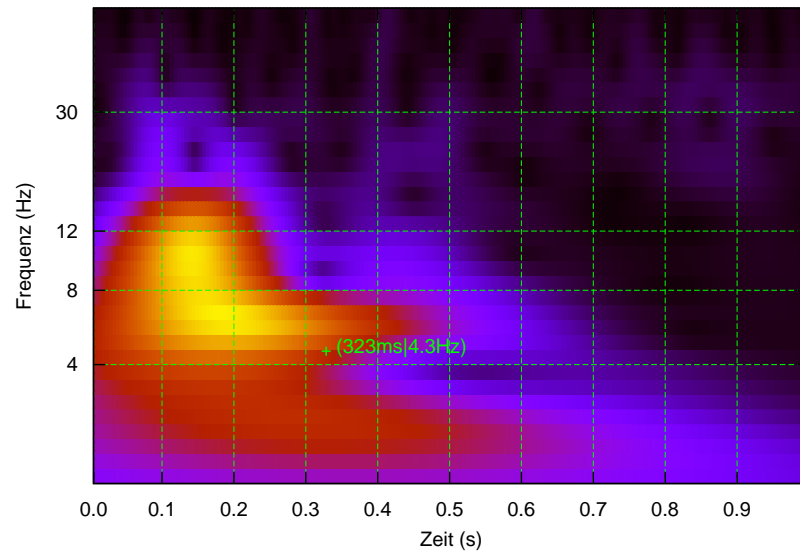
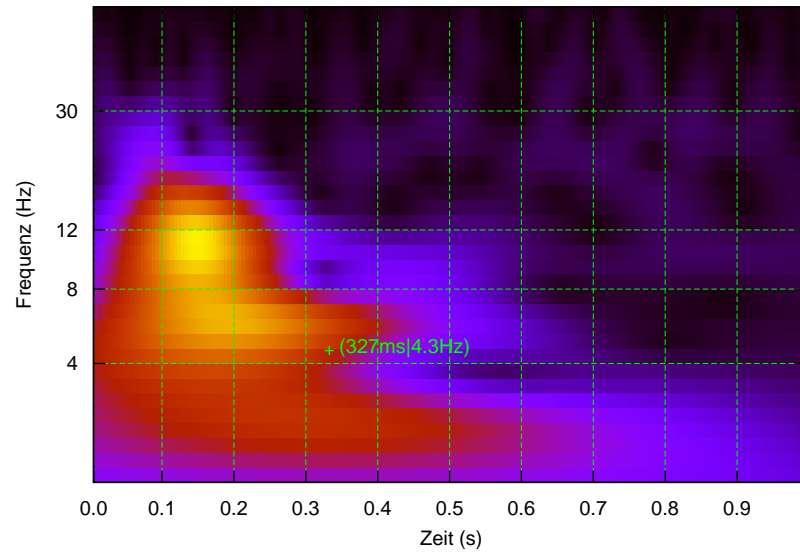
(a) Bedingung e^- (b) Bedingung e^+

Abbildung 9.22: Beträge und Schwerpunkte von Komponente 1 für die Kategorie e bei Korrelationsgewichtung. Die Farbskala der Beträge reicht von schwarz (niedriger Betrag) zu gelb (hoher Betrag), wobei keine Werte angegeben sind, da diese vorwiegend durch die Hauptkomponentenanalyse bestimmt werden.

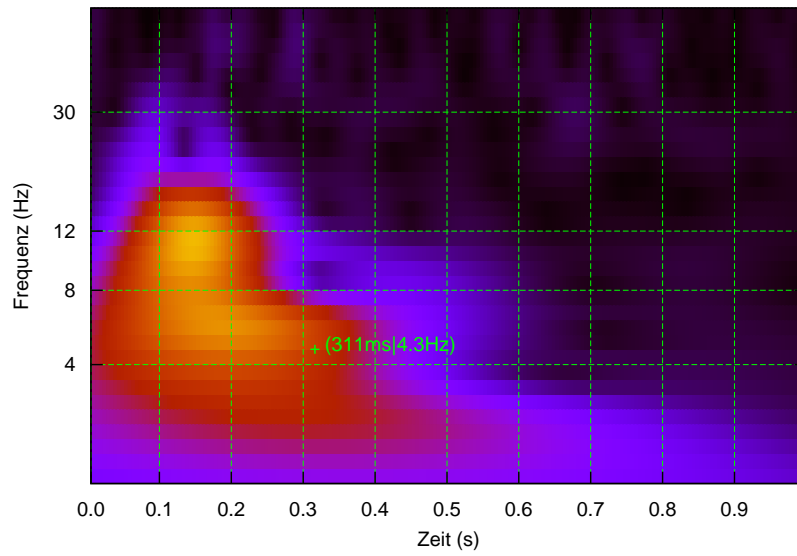
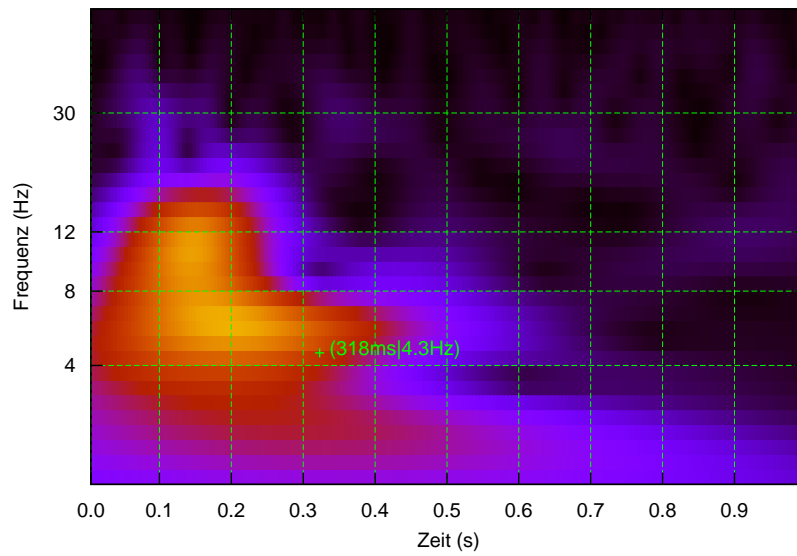
(a) Bedingung $p-$ (b) Bedingung $p+$

Abbildung 9.23: Beträge und Schwerpunkte von Komponente 1 für die Kategorie p bei Korrelationsgewichtung. Die Farbskala der Beträge reicht von schwarz (niedriger Betrag) zu gelb (hoher Betrag), wobei keine Werte angegeben sind, da diese vorwiegend durch die Hauptkomponentenanalyse bestimmt werden.

Kritische Bewertung der Ergebnisse

Die erzielten Ergebnisse sind unter allen drei Gewichtungen fast identisch. Die Korrelationsgewichtung erzielt bei der Latenz jeweils einen signifikanten Treffer mehr als die anderen beiden Gewichtungen. Allerdings ist dieses Ergebnis in gewisser Weise auch zu erwarten, denn die Korrelationsgewichtung fasst, wie oben schon beschrieben, die Daten anhand ihrer *Ähnlichkeit* zusammen. Dies bringt für die eher geometrisch orientierte Analyse der Schwerpunkte mit der Matrix U , die weiter oben beschrieben wurde, kaum Vorteile, kann sich aber für die in diesem Abschnitt vorgenommene Analyse der Zeit-Frequenz-Schwerpunkt durchaus positiv auswirken. Eine Bewertung, ob die Korrelationsgewichtung prinzipiell zu besseren Ergebnissen führt, kann jedoch im Rahmen der vorliegenden Versuchsdaten nicht abgegeben werden.

Vergleich mit den Analyseergebnissen aus der Originalarbeit

Auch hier ist zu bemerken, dass für die Zeit-Frequenz-Eigenschaften der Komponenten von V^T nur eine sehr eingeschränkte Vergleichbarkeit gegeben ist.

Ein vorsichtiger Vergleich kommt hier mit [SC03, Fig. 2B] in Frage, wobei dort die Befunde für den Zeitbereich von 80ms–130 ms nach dem Trigger dargestellt werden, während die hier vorgenommene Analyse wiederum den gesamten Zeitbereich von 0ms–1000ms abdeckt, woraus eine deutliche Einschränkung der Vergleichbarkeit folgt.

In [SC03, Fig. 2B] wird beim Vergleich der Latenz der Komponenten, festgestellt, dass diese für Wörter aus den „-“ Kategorien signifikant geringer ist als für Wörter aus den „+“ Kategorien. Dies entspricht allerdings *nicht* den oben dargestellten Ergebnissen, wo jeweils nur für Wörter aus der Kategorie p - eine gegenüber e - und a - (und unter Korrelationsgewichtung auch gegenüber $a+$) signifikant geringere Latenz konstatiert wird.

Aus [Skr98, Fig. 3A, 4A, 5A] geht hervor, dass Wörter der Dimension a jeweils zur größten und Wörter der Dimension p meist zur kleinsten Latenz der betrachteten Komponenten führen, was in etwa analog zum den oben dargestellten Befunden ist, dass die Latenz der größten Hauptkomponente unter allen Gewichtungen für p - signifikant kleiner ist als für a - und e - sowie bei Korrelationsgewichtung auch kleiner als für $a+$.

9.4 Zusammenfassung und Ausblick

Die EEG-Analyse mit Matrixwavelets stellt sich im Rahmen der oben dargestellten Ergebnisse als nützliches Werkzeug dar. Allerdings sind sowohl

die Ergebnisse über die Verlagerung der Aktivitätsschwerpunkte aus Abschnitt 9.3.1, als auch die Ergebnisse über die Verlagerung der Zeit-Frequenz-Schwerpunkte aus Abschnitt 9.3.3 nur Teilweise im Einklang mit den Ergebnissen aus den Originalarbeiten.

Für eine hieb- und stichfeste Gegenüberstellung, aus der die genauen Vorteile und Probleme der neuen Methode hervorgehen, sollte zunächst eine Reihe von Datensätzen analysiert werden, bei denen starke und eindeutige Effekte auftreten, die auch zweifelsfrei einzelnen Elektroden(gruppen) zugeordnet werden können.

Hier würden sich einfache Versuchsdesigns anbieten, in denen zum Beispiel ein visueller Reiz im rechten Gesichtsfeld nach einer kleinen Pause mit einem Tastendruck der linken Hand beantwortet werden muss. Üblicherweise würde der visuelle Reiz Aktivität in der linken und das Bewegen der Hand Aktivität in der rechten Hemisphäre auslösen.

Um zu einer genaueren Lokalisierung zu kommen, könnten außerdem die EEG-Daten zunächst auf Dipolquellen zurückgerechnet werden, die sich genauer einzelnen Hirnregionen zuordnen lassen und als weitere Möglichkeit der Analyse von Daten mit starker, räumlich begrenzter Aktivität könnten intrakranielle EEG-Aufzeichnungen der ictalen Phase bei Patienten mit fokaler Epilepsie in Frage kommen.

Anhang A

Wavelets

A.1 Reelle Wavelets

A.1.1 Reelle Wavelets mit kompaktem Träger

Das Haar-Wavelet

Das Haar-Wavelet ist das einfachste Wavelet mit kompaktem Träger. In Folge dessen ist jedoch sein Träger im Frequenzbereich unbeschränkt und es klingt dort überdies nur sehr langsam ab. Diese Eigenschaften machen es für eine schnelle kontinuierliche Transformation denkbar ungeeignet und es ist deshalb auch nicht implementiert.

Daubechies-Wavelets

Daubechies-Wavelets bilden eine Familie von Wavelets, die zu einer jeweils vorgegebenen Anzahl verschwindender Momente das Wavelet mit dem kleinsten kompakten Träger darstellen [Mal99]. Es gibt für sie keine geschlossene Form und sie sind hier nur der Vollständigkeit halber erwähnt.

Sowohl das Haar-, als auch die Daubechies-Wavelets sind eigentlich nicht für die kontinuierliche Wavelettransformation gedacht und entworfen. Speziell die Daubechies-Wavelets wurden im Rahmen der Theorie verfeinerbarer Funktionen und der *diskreten* Wavelettransformation entwickelt, lassen sich hervorragend mit Hilfe von FIR-Filtern implementieren, und leisten zum Beispiel in der Bildkompression nach dem JPEG-2000-Standard gute Dienste.

A.1.2 Ableitungen von Gauß-Funktionen

Eine weitere Klasse von Wavelets ergibt sich aus der Ableitung von Gaußfunktion. Sie werden zum Beispiel in [TC98] beschrieben und haben die fol-

gende allgemeine Gestalt:

$$\psi_m(t) := \frac{(-1)^{m+1}}{\sqrt{\Gamma(m + \frac{1}{2})}} \frac{d^m}{dt^m} \left(e^{-t^2/2} \right), \quad \text{für } m \in \mathbb{N},$$

$$\hat{\psi}_m(\omega) = \frac{-i^m}{\sqrt{\Gamma(m + \frac{1}{2})}} \omega^m e^{-\omega^2/2}$$

Das Mexican-Hat-Wavelet

Das Mexican-Hat-Wavelet ist der prominenteste Vertreter dieser Gattung und definiert durch [Mal99, S. 80]

$$\psi(t) := \frac{2}{\pi^{1/4} \sqrt{3}\sigma} \left(1 - \frac{t^2}{\sigma^2} \right) e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

mit dem Spektrum

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{\sqrt{8}\sigma^{5/2}\pi^{1/4}}{\sqrt{3}} \omega^2 e^{-\sigma^2\omega^2/2}.$$

Leider ist sein Träger im Zeitbereich so breit, dass es für die später vorgestellte schnelle Software nicht gut geeignet ist. Abweichend von [Mal99] wurde das Vorzeichen umgekehrt, da dies der gängigen Konvention mit einem lokalen Maximum bei $t = 0$ entspricht.

A.2 Komplexe Wavelets

A.2.1 Komplexe Gabor-Wavelets

Gabor-Wavelets stellen eine ganze Klasse von Funktionen dar, die dadurch definiert sind, dass eine komplexe harmonische Schwingung mit einem Fenster g gedämpft wird; sie sind also von der Gestalt $g_{\omega,x}(t) := e^{i\omega t} g(t-x)$ [Chu92, S. 531]. Häufig werden dabei Gauß-Fenster, zum Beispiel $g(t) := \pi^{-1/4} e^{-t^2/2}$ verwendet und das bekannteste Gabor-Wavelet, das Morlet-Wavelet hat auch ebendiese Gestalt.

Das komplexe Morlet-Wavelet

Das komplexe Morlet-Wavelet besteht im wesentlichen aus einer modulierten Gaußfunktion und ist wie folgt definiert [Dau92, S. 76ff.]:

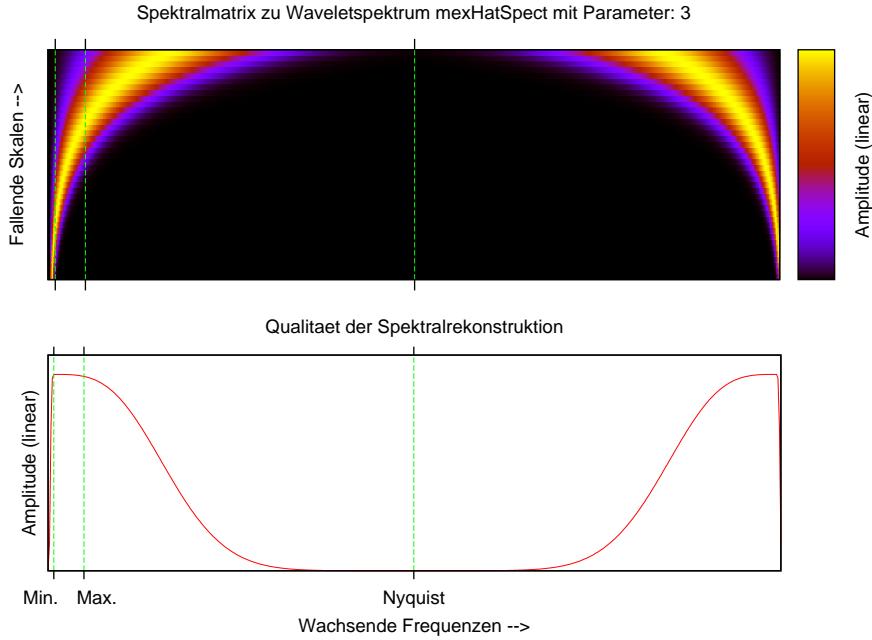


Abbildung A.1: Spektrogramm des Mexican-Hat-Wavelets.

Definition 42 Die Funktion ψ_{Morlet, ξ_0} definiert durch

$$\psi_{Morlet, \xi_0}(x) := \pi^{-1/4} \left(e^{-i\xi_0 x} - e^{-\xi_0^2/2} \right) e^{-x^2/2}$$

mit dem Spektrum

$$\hat{\psi}_{Morlet, \xi_0}(\omega) = \pi^{-1/4} \left(e^{-(\omega - \xi_0)^2/2} - e^{-\omega^2/2} e^{-\xi_0^2/2} \right)$$

heißt *Morlet-Wavelet*.

Bemerkung 12 Das Spektrum des Morlet-Wavelets ist reell.

Lemma 17 Für alle $\xi_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ hat das Spektrum des Morlet-Wavelets genau eine Nullstelle, und zwar bei $\xi = 0$.

BEWEIS Das Spektrum des Morlet-Wavelets ist genau dann null, wenn gilt:

$$\begin{aligned} \pi^{-1/4} \left(e^{-(\omega - \xi_0)^2/2} - e^{-\omega^2/2} e^{-\xi_0^2/2} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{-(\omega - \xi_0)^2/2} &= e^{-\omega^2/2} e^{-\xi_0^2/2} \\ \Leftrightarrow (\omega^2 - 2\xi_0\omega + \xi_0^2) &= (\omega^2 + \xi_0^2) \\ \Leftrightarrow \omega &= 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

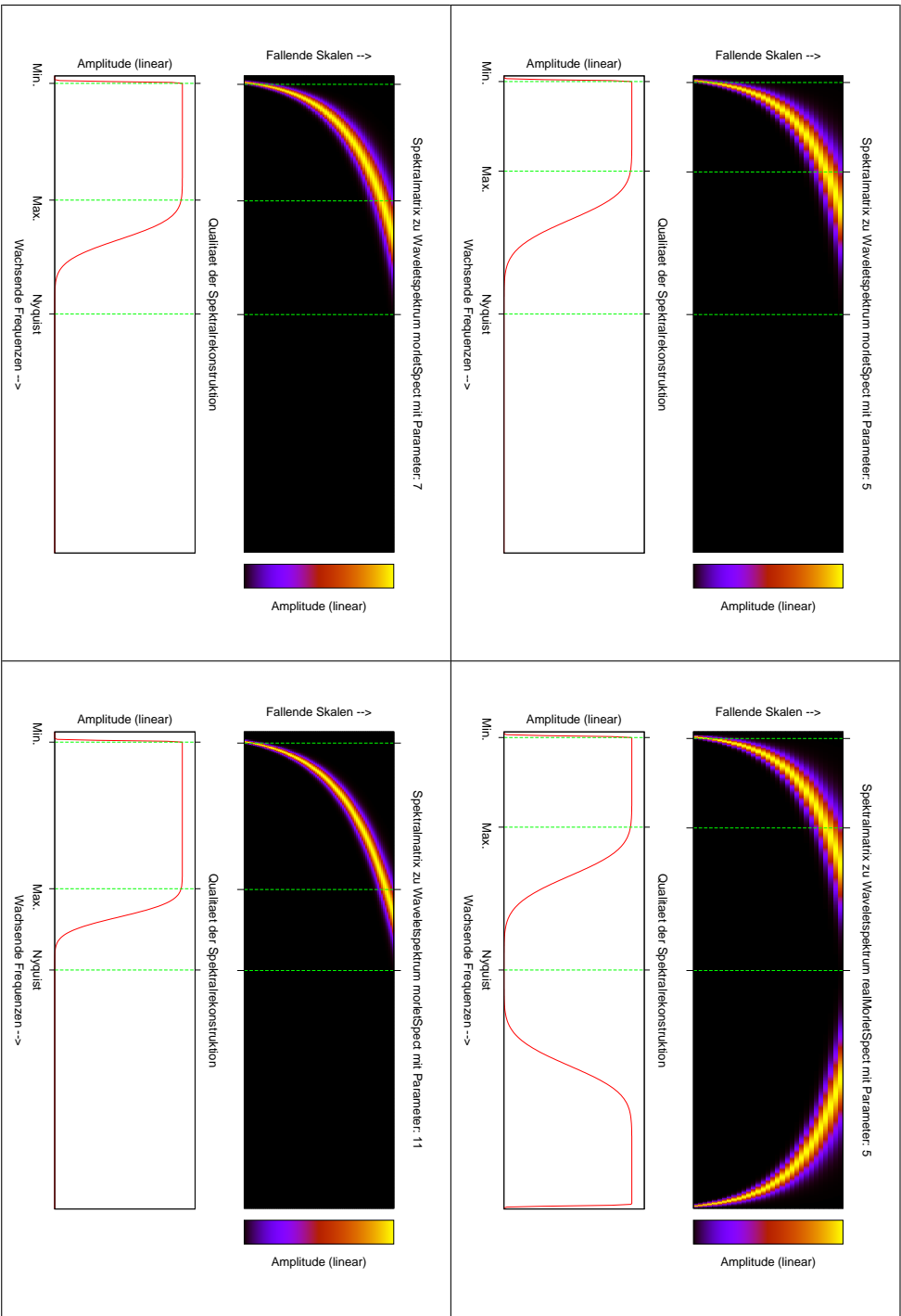


Abbildung A.2: Spektrogramme von Morlet-Wavelets zu verschiedenen Parametern, rechts oben in der reellen Ver-
sion.

A.2.2 Daubechies–Grossman–Meyer-Wavelets

Die Daubechies–Grossman–Meyer-Wavelets sind ein aus [Dau92, S. 73ff.] entnommenes Beispiel für komplexe Wavelets mit kompaktem Träger im Frequenzbereich, die einen so genannten Frame bilden, so dass schon eine abzählbare Menge von Waveletkoeffizienten reichen würde, um eine Funktion zu rekonstruieren. Ihr Spektrum hängt von zwei Parametern a_0, b_0 ab und genügt mit $l := 2\pi / (a_0^2 b_0 - b_0)$ der Gleichung

$$\hat{\psi}_{DGM}(\omega) := \sqrt{A} \cdot \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \nu\left(\frac{\omega-l}{l(a_0-1)}\right)\right) & \text{für } l \leq \omega \leq a_0 l \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \nu\left(\frac{\omega-a_0 l}{a_0 l(a_0-1)}\right)\right) & \text{für } a_0 l \leq \omega \leq a_0^2 l \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

dabei ist A eine Normierungskonstante, die hier nicht weiter wichtig ist und ν wiederum eine Funktion, die in irgendeiner Form auf dem Einheitsintervall glatt von 0 nach 1 geht, zum Beispiel

$$\nu(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \sin^2 \frac{\pi}{2} x & \text{für } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

Andere Funktionen sind möglich, siehe zum Beispiel [Bla98, Formel 4.3.(9)].

A.2.3 Das Paul-Wavelet

Das Paul-Wavelet ist ein aus [TC98] entnommenes analytisches Wavelet, dessen Spektrum in Abhängigkeit vom Parameter m für $\omega \searrow 0$ polynomial und glatt gegen 0 strebt. Es ist im Zeitbereich definiert durch

$$\psi_{Paul,m}(t) := \frac{2^m i^m m!}{\sqrt{\pi} (2m)!} (1 - it)^{-(m+1)}$$

und sein Spektrum ist

$$\hat{\psi}_{Paul,m}(\omega) = \begin{cases} \frac{2^m}{\sqrt{m(2m-1)!}} \omega^m e^{-\omega} & \text{für } \omega > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

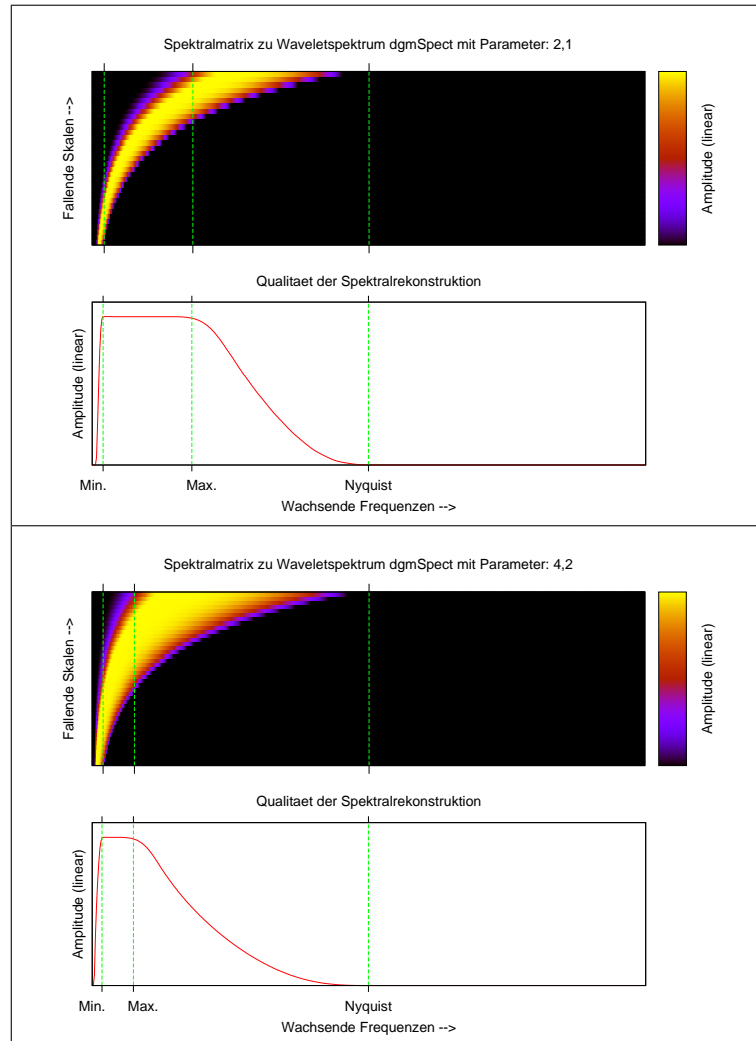


Abbildung A.3: Spektrogramme von Daubechies-Grossman-Meyer-Wavelets zu verschiedenen Parametern.

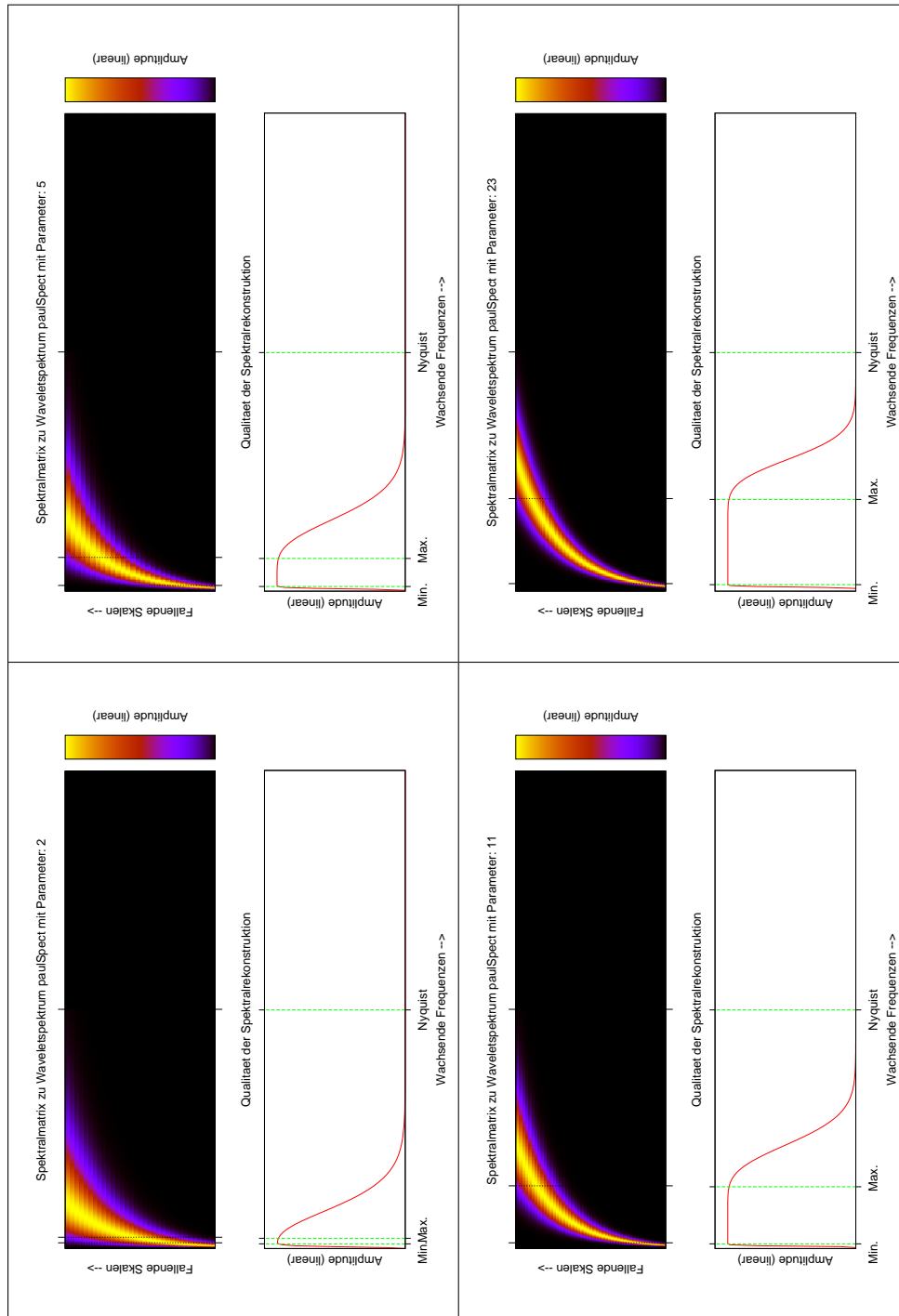


Abbildung A.4: Spektrogramme von Paul-Wavelets zu verschiedenen Parametern.

Anhang B

Die Software

Die Software zu den im vorangegangenen Text aufgeführten Projekten wurde geschrieben mit dem Ziel, einerseits eine einfach bedienbare Software zur Wavelettransformation und ihrer Inversen zu haben, die andererseits schnell genug ist, um in der Praxis Anwendung zu finden. Vor allem sollte der Rechenaufwand für wiederholte Transformationen mit demselben Wavelet und derselben Signallänge minimal sein. Diesem Ziel sind einige theoretisch mögliche Funktionen zum Opfer gefallen; so ist es zum Beispiel nicht vorgesehen, die Hin- und die Rückrichtung der Transformation mit verschiedenen Wavelets zu berechnen, da dies das Intervall der für die Transformation verfügbaren Skalen noch weiter einengen würde, als es ohnehin schon der Fall ist.

Das Ziel der schnellen Transformation wurde für die skalare Transformation gut erreicht, wie aus Tabelle B.1 zu entnehmen ist.

Tabelle B.1: Erreichte Rechenleistung für verschiedene Anzahlen von Samples auf einem Desktop-PC mit Intel Core2-Quad-Prozessor und 2.67GHz Taktfrequenz unter Ubuntu 8.04 „Hardy Heron“, mit der FFTW3-Bibliothek und Octave 2.1.73.

Anzahl der Samples	Transformationen	Inverse
512	675/s	112/s
1000	211/s	59/s
1536	126/s	28/s

Tabelle B.2: Implementierte Wavelets

Name	Wavelet	Parameter
<code>dgmSpect</code>	Daubechies–Grossman–Meyer	Vektor ($[a_0, b_0]$)
<code>mexHatSpect</code>	Mexican-Hat	Skalar (σ)
<code>morletSpect</code>	Morlet	Skalar (ξ_o)
<code>paulSpect</code>	Paul	Skalar (m)
<code>realMorletSpect</code>	Reelles Morlet	Skalar (ξ_o)
<code>zeroSpect</code>	<i>Nullspektrum</i>	—

B.1 Implementierte Wavelets

Die zur Verfügung stehenden Wavelets sind alle im Spektralbereich definiert. Es sind das Daubechies–Grossman–Meyer-, das Mexican-Hat-, das Paul-, sowie das komplexe und reelle Morlet-Wavelet (mitunter auch Gabor-Wavelet genannt) implementiert. Darüberhinaus existiert noch eine Funktion, die ein Null-Spektrum zurückliefert.

Aufruf

`Psi = <Name> (Skala, Freq [, Param])`

Übergebene Parameter

Skala ist ein positiver Skalar, der die Skala für das auszuwertende Waveletspektrum festlegt.

Freq ist ein Skalar oder Vektor, der eine oder mehrere Frequenzen enthält, bei denen das Waveletspektrum ausgewertet wird. Je nachdem, ob ein Skalar oder Vektor übergeben wird, wechselt die Aufrufsemantik. Wird ein Skalar übergeben, so wird nur das rohe Spektrum ausgewertet, wird ein Vektor der Länge l übergeben, so wird das zurückgegebene Spektrum zusätzlich so normalisiert, dass `sumsq(Psi) == 2 * pi * 1`. Dies bewirkt, dass sich das Spektrum gleichermaßen für Hin- und Rücktransformation eignet.

Param ist ein optionaler Parameter, der an Wavelets weitergegeben wird, die Parameter besitzen. Der Typ ist nicht festgelegt und hängt vom jeweiligen Wavelet ab.

Tabelle B.2 gibt einen Überblick über die implementierten Wavelets und die Typen ihrer Parameter.

Rückgabewert

Psi hat denselben Typ (Skalar oder Vektor) wie **Freq** und enthält die Auswertungen des Waveletspektrums an dieser, beziehungsweise diesen.

B.2 Die skalare Wavelettransformation

B.2.1 Die Transformationen

B.2.1.1 `waveletTransformSpect`

Diese Funktion berechnet die Wavelettransformierte eines skalaren Signals zu einem gegebenen Wavelet. Sie ist dahingehend optimiert, dass bei einem erneuten Aufruf mit anderem Signal gleicher Länge, aber ansonsten identischen Parametern, alle bereits vorausberechneten Tabellen für die Waveletspektren wieder verwendet werden, so dass sich ein deutlicher Geschwindigkeitsvorteil ergibt.

Aufruf

```
[ WT, Sc, Fr ] = waveletTransformSpect ( t, dt, Spect, Arg )
```

Übergebene Parameter

t enthält das zu transformierende Signal als Vektor.

dt enthält das Abtastintervall (üblicherweise in Sekunden) als Skalar.

Spect enthält den Namen des zu verwendenden Waveletspektrums aus Tabelle B.2 als String.

Arg enthält das Argument zum verwendeten Wavelet als Skalar oder Vektor.

Rückgabewerte

WT enthält die Wavelettransformierte des Signals der Länge l als zweidimensionales Array der Größe $p \times l$, wobei p die Anzahl der Skalen und a priori unbekannt ist.

Sc enthält die in **WT** enthaltenen Skalen als Vektor. Die genaue Anzahl und Verteilung ergibt sich aus dem Rückgabewert der weiter unten beschriebenen Funktion `determineScalesPerOctave`, die die pro Oktave notwendige ganzzahlige Anzahl der Skalen bestimmt. Details finden sich dort.

Fr enthält die zu **Sk** gehörigen Frequenzen als Vektor, die aus der zentralen Frequenz des Wavelets, **dt** und der zugehörigen Skala errechnet werden.

B.2.1.2 `scaledInverseWaveletTransformSpect`

Diese Funktion führt (als `fastScaled...` über die schnelle Rekonstruktion aus Bemerkung 6) von einer Transformierten wieder zurück zu einem korrekt skalierten Signal. Auch sie ist dahingehend optimiert, dass bei einem erneuten Aufruf mit anderer Transformierter gleicher Dimension, aber ansonsten identischen Parametern, alle bereits vorausberechneten Tabellen für die Waveletspektra wieder verwendet werden, so dass sich auch hier ein deutlicher Geschwindigkeitsvorteil ergibt.

Aufruf

```
t = (fast)scaledInverseWaveletTransformSpect ( WT, Sc, Spect,
Arg )
```

Übergebene Parameter

WT enthält die zurückzurechnende Transformierte als Matrix.

Sc enthält die in **WT** enthaltenen Skalen als Vektor, so wie sie von `waveletTransformSpect` zurückgegeben werden.

Spect enthält den Namen des zu verwendenden Waveletspektrums aus Tabelle B.2 als String.

Arg enthält wieder das Argument zum verwendeten Wavelet.

Rückgabewert

t enthält das Ergebnis der umgekehrten Transformation als Vektor *komplexer* Zahlen, so dass noch eine Bildung des Realteils erfolgen muss, um zu einem reellen Signal zurück zu gelangen.

B.2.2 Hilfsttransformationen

B.2.2.1 integerUpsampling

Diese Funktion führt ein FFT-basiertes Upsampling eines Signals um einen gegebenen Faktor, wie in Abbildung 3.5 dargestellt, durch. Spalten- oder Zeilenvektoreigenschaft werden dabei erhalten, Reellwertigkeit wird erzwungen.

Aufruf

```
T = integerUpsampling ( t, u )
```

Übergebene Parameter

t enthält das umzurechnende Signal als Vektor.

u enthält den ganzzahligen Upsampling-Faktor.

Rückgabewert

T enthält das umgerechnete Signal als Vektor.

B.2.2.2 upsRep

Diese Funktion führt für ein übergebenes Signal ein Upsampling und eine Periodisierung wie in Abschnitt 3.4.3.1 durch, so dass die obere und untere Grenzfrequenz der Transformation dem Wavelet entsprechend angepasst werden können. Die außerdem übergebene Abtastfrequenz wird ebenfalls entsprechend umgerechnet.

Aufruf

```
[ T, new_sf ] = upsRep ( t, sf, ups, rep )
```

Übergebene Parameter

t enthält das umzurechnende Signal mit l Abtastpunkten.

sf enthält die Abtastfrequenz des Originalsignals als Skalar.

ups enthält den ganzzahligen Upsampling-Faktor. Ein Faktor von 1 bewirkt, dass kein Upsampling stattfindet.

`rep` enthält den ganzzahligen Periodisierungs-Faktor. Ein Faktor von 1 bewirkt, dass keine Periodisierung stattfindet.

Rückgabewerte

`T` enthält das umgerechnete Signal als Vektor der Länge $l \cdot \text{ups} \cdot \text{rep}$.

`new_sf` enthält die neue Abtastfrequenz als Skalar

B.2.2.3 deRepTransform

Die Wavelettransformation eines periodisierten Signals ist ebenfalls periodisch und daher reicht es, eine einzige Periode darzustellen oder für Filterzwecke zu bearbeiten. `deRepTransform` leistet genau diese Extraktion.

Aufruf

```
single_WT = deRepTransform ( WT, rep )
```

Übergebene Parameter

`WT` enthält die zu deperiodisierende Wavelettransformation als Matrix.

`rep` enthält den ganzzahligen Periodisierungsfaktor.

Rückgabewert

`single_WT` enthält die extrahierte Periode als Matrix.

B.2.2.4 reRepTransform

Um Schwierigkeiten in den tiefen Frequenzen bei der Rücktransformation zu vermeiden, muss eine deperiodisierte Wavelettransformation wieder reperiodisiert werden.

Aufruf

```
rep_WT = reRepTransform ( single_WT, rep )
```

Übergebene Parameter

`single_WT` enthält die zu reperiodisierende einzelne Periode der Wavelettransformation als Matrix.

`rep` enthält den ganzzahligen Periodisierungs-Faktor als Skalar.

Rückgabewert

`rep_WT` enthält die reperiodisierte Wavelettransformation als Matrix.

B.2.3 Hilfsfunktionen

B.2.3.1 `computeUpsRepDispValues`

Soll eine Wavelettransformierte bestimmte obere und untere Grenzfrequenzen *sicher* enthalten, so muss dies ggf. durch Upsampling und Periodisierung sichergestellt werden. Diese Funktion berechnet die passenden Parameter.

Aufruf

```
[ ups, rep, new_sf ] = computeUpsRepDispValues ( spect, args, sf,  
1, bot, top )
```

Übergebene Parameter

`spect` enthält das zu benutzende Waveletspektrum als String.

`args` enthält die Argumente für das Wavelet.

`sf` enthält die Abtastfrequenz des Signals.

`1` enthält die Anzahl der Abtastpunkte – also die Länge des Signalvektors – als Skalar.

`bot` enthält die gewünschte untere Grenzfrequenz als Skalar.

`top` enthält die gewünschte obere Grenzfrequenz als Skalar.

Rückgabewerte

`ups` enthält den errechneten Upsampling-Faktor als Skalar.

`rep` enthält den errechneten Periodisierungs-Faktor als Skalar.

`new_sf` enthält die neue Abtastfrequenz.

B.2.3.2 computeUpsRepReconstructValues

Soll auch die Rücktransformierte bestimmte Frequenzen sicher enthalten, so muss sichergestellt sein, dass die die Heisenberg-Boxen aller relevanten Punkte ganz in der Wavelettransformierten enthalten sind. *Dies kann zu höheren Werten für Upsampling und Periodisierung führen, als sie mit `computeUpsRepDispValues` errechnet werden!*

Aufruf, übergebene Parameter und Rückgabewerte

Siehe B.2.3.1.

B.2.3.3 L1norm

Diese Funktion berechnet die \mathcal{L}_1 -Norm des übergebenen Waveletspektrums zu einer ebenfalls übergebenen Skala.

Aufruf

`L = L1norm (spect, args , scale)`

Übergebene Parameter

`spect` enthält das zu benutzende Waveletspektrum als String.

`args` enthält die Argumente für das Wavelet.

`scale` Enthält die Skala zu der die Norm berechnet werden soll als Skalar.

Rückgabewert

`L` enthält die errechnete Norm.

B.2.3.4 L2norm

Diese Funktion berechnet die \mathcal{L}_2 -Norm des übergebenen Waveletspektrums zu einer ebenfalls übergebenen Skala und zwar über alle Frequenzen. Für ein richtig implementiertes Wavelet sollte dieser Wert über alle Skalen konstant sein!

Aufruf, übergebene Parameter und Rückgabewert Siehe B.2.3.3.

B.2.3.5 L2hnorm

Diese Funktion berechnet die \mathcal{L}_2 -Norm des übergebenen Waveletspektrums zu einer ebenfalls übergebenen Skala und zwar nur für positive Frequenzen. Für ein richtig implementiertes Wavelet sollte dieser Wert über alle Skalen konstant sein! Darüberhinaus sollten sich für analytische Wavelets die Rückgabewerte von `L2norm` und `L2hnorm` überhaupt nicht, für reelle Wavelets um einen Faktor $\sqrt{2}$ unterscheiden.

Aufruf, übergebene Parameter und Rückgabewert Siehe B.2.3.3.

B.2.4 Interne Hilfsfunktionen

Diese Funktionen werden innerhalb der Software benutzt, um die Tabellen mit den abgetasteten Waveletspektra vorauszuberechnen. Sie sollten nie „von Hand“ aufgerufen werden müssen.

B.2.4.1 determineScalesPerOctave

Diese Funktion bestimmt, wie dicht die Skalen für die Wavelettransformation liegen sollten und zwar mit dem Ziel, eine möglichst gute Rekonstruktion zu erreichen. Da die Quadratur mit der Trapezregel durchgeführt wird, liegt dieser Bestimmung ein Gütekriterium für die Approximation der Wavelettransformierten in Skalenrichtung mit quadratischen Polynomen zugrunde.

Aufruf

```
S = determineScalesPerOctave ( spect, args, 1 )
```

Übergebene Parameter

spect enthält das zu benutzende Waveletspektrum als String.

args enthält die Argumente für das Wavelet.

1 enthält die Anzahl der Abtastpunkte – also die Länge des Signalvektors – als Skalar.

Rückgabewert

S enthält die Zahl der Skalen, die *pro Oktave* berechnet wird.

B.2.4.2 scalesFrequenciesAndSpectra

Diese Funktion berechnet die Spektralmatrix, die für die Wavelettransformation letztendlich benutzt wird. Außerdem liefert sie in einem Vektor die benutzten Skalen und die zu ihnen gehörigen zentralen Frequenzen zurück.

Aufruf

```
[ S, F, Psi ] = scalesFrequenciesAndSpectra ( spect, args, dt, l )
```

Übergebene Parameter

`spect` enthält das zu benutzende Waveletspektrum als String.

`args` enthält die Argumente für das Wavelet.

`dt` enthält das Abtastintervall (üblicherweise in Sekunden) als Skalar.

`l` enthält die Anzahl der Abtastpunkte – also die Länge des Signalvektors – als Skalar.

Rückgabewerte

`S` enthält die zu `PSI` gehörigen Skalen als Vektor.

`F` enthält die zu `S` gehörigen zentralen Frequenzen als Vektor.

`PSI` enthält die zu verwendenden Spektren als Matrix.

B.2.4.3 trapezoidalQuadRandomNodes

Diese Funktion führt für zwei Matrizen gleicher Dimension, je eine für Stützstellen und Funktionswerte, eine spaltenweise numerische Quadratur mit der Trapezregel durch.

Aufruf

```
Q = trapezoidalQuadRandomNodes ( x, y )
```

Übergebene Parameter

`x` enthält Spaltenvektoren von Stützstellen.

`y` enthält Spaltenvektoren von Funktionswerten.

Rückgabewert

`Q` enthält die Ergebnisse der spaltenweisen Quadratur als Zeilenvektor.

B.3 Die Matrixwavelet-Transformation

B.3.1 Definition von Matrixwavelets

Es gibt keine speziellen Funktionen für Matrix-Wavelets, sondern diese werden dargestellt als Cell-Arrays mit Namen von Waveletspektra aus Tabelle B.2; ebenso werden die Parameter für die Wavelets in einem anderen Cell-Array gleicher Größe übergeben und dem entsprechenden Waveletspektrum zugeordnet.

B.3.2 Transformation und inverse Transformationen

B.3.2.1 `matrixWaveletTransformSpect`

Diese Funktion berechnet die Matrixwavelet-Transformierte eines vektorwertigen Signals zu einem gegebenen Matrixwavelet. Sie ist dahingehend optimiert, dass bei einem erneuten Aufruf mit anderem Signal gleicher Länge und Dimension, aber ansonsten identischen Parametern, alle bereits vorausgerechneten Tabellen für die Waveletspektra wieder verwendet werden, so dass sich ein deutlicher Geschwindigkeitsvorteil ergibt.

Aufruf

```
[ WT, scales, frequencies ] = matrixWaveletTransformSpect ( t,  
dt, wavelets, args, factors )
```

Übergebene Parameter

`t` enthält das zu transformierende Signal als Vektor von Zeilenvektoren, die ihrerseits Zeitreihen darstellen. Ein m -dimensionales Signal mit n Abtastpunkten wird also als $m \times n$ -Matrix abgebildet.

`dt` enthält das Abtastintervall (üblicherweise in Sekunden) als Skalar.

`wavelets` enthält die Namen der zu verwendenden Waveletspektra aus Tabelle B.2 als Cell-Array von Strings.

args enthält die Argumente zu den verwendeten Wavelets als Cell-Array Skalaren oder Vektoren in gleicher Größe wie oben.

factors enthält Gewichtungsfaktoren zu den verwendeten Wavelets als Matrix in gleicher Größe wie die Cell-Arrays. Einzelne Faktoren dürfen auch 0 sein.

Rückgabewerte

WT enthält die Matrixwavelet-Transformierte als dreidimensionales Array. Dabei wird ein m -dimensionales Signal mit n Abtastpunkten in ein $m \times n \times p$ -dimensionales Array transformiert und zwar so, dass wenn **wavelets** oder **factors** Diagonalgestalt haben, das Array $WT(k, :, :)$ der skalaren Wavelettransformierten des k -ten Signals im Eingabevektor entspricht. p entspricht der Anzahl der Skalen und ist a priori nicht bekannt.

scales enthält die für die Berechnung von **WT** benutzen Skalen zu den Wavelets aus **wavelets** als Cell-Array von Skalaren.

frequencies enthält die zu den Skalen aus **scales** gehörenden zentralen Frequenzen als Cell-Array von Skalaren.

B.3.2.2 changeableFactors...

Diese Funktion berechnet die Matrixwavelet-Transformierte eines vektorwertigen Signals zu einem gegebenen Matrixwavelet. Sie ist dahingehend optimiert, dass bei einem erneuten Aufruf mit anderem Signal gleicher Länge und Dimension, anderen Faktoren, aber ansonsten identischen Parametern, alle bereits vorausberechneten Tabellen für die Waveletspektren wieder verwendet werden.

Aufruf

```
[ WT, scales, frequencies ] =  
changeableFactorsMatrixWaveletTransformSpect ( t, dt, wavelets,  
args, factors )
```

Übergebene Parameter und Rückgabewerte

Siehe B.3.2.1.

B.3.2.3 unscaledInverse...

Diese Funktion überführt eine gegebene $m \times n \times p$ -dimensionale Matrixwavelet-Transformierte zurück in ein vektorwertiges Signal der Dimension $m \times n$. Die Funktion berechnet die Zulässigkeitsmatrix und ihre Inverse nicht selbst, da diese eventuell außerhalb der Funktion schneller berechnet werden kann.

Aufruf

```
T = unscaledInverseMatrixWaveletTransformSpect ( WT, NM, scales,
wavelets, args, factors )
```

Übergebene Parameter

WT enthält die Matrixwavelet-Transformierte als dreidimensionales Array, wie von `matrixWaveletTransformSpect` ausgegeben.

NM enthält die Inverse der nach Abschnitt 6.1 berechneten Zulässigkeitsmatrix multipliziert mit 2. Zur Berechnung siehe auch B.3.3.1.

scales Enthält die von `matrixWaveletTransformSpect` oder `changeableFactorsMatrixWaveletTransformSpect` zurückgegebenen Skalen, die in der Transformation enthalten sind.

wavelets enthält die Namen der zu verwendenden Waveletspektren aus Tabelle B.2 als Cell-Array von Strings.

args enthält die Argumente zu den verwendeten Wavelets als Cell-Array von Skalaren und auch Vektoren in gleicher Größe wie oben.

factors enthält Gewichtungsfaktoren zu den verwendeten Wavelets als Matrix in gleicher Größe wie die Cell-Arrays. Einzelne Faktoren dürfen auch 0 sein.

Rückgabewerte

T enthält das Ergebnis der umgekehrten Transformation als Vektor *komplexer* Zahlen, so dass noch eine Bildung des Realteils erfolgen muss, um zu einem reellen Signal zurück zu gelangen.

B.3.2.4 noTransposeUnscaledInverse...**Aufruf**

```
T = noTransposeUnscaledInverseMatrixWaveletTransformSpect ( WT,  
NM, scales, wavelets, args, factors )
```

Übergebene Parameter

NM enthält die Inverse der nach Definition 36 berechneten Zulässigkeitsmatrix multipliziert mit 2.

Zur Berechnung siehe auch B.3.3.2; für die anderen Parameter siehe B.3.2.3.

Rückgabewert

Siehe B.3.2.3.

B.3.2.5 diagonalUnscaledInverse...**Aufruf**

```
T = diagonalUnscaledInverseMatrixWaveletTransformSpect ( WT, NM,  
scales, wavelets, args, factors )
```

Übergebene Parameter

NM enthält die Inverse der nach Satz 30 berechneten Zulässigkeitsmatrix multipliziert mit 2.

Zur Berechnung siehe auch B.3.3.3; für die anderen Parameter siehe B.3.2.3.

Rückgabewert

Siehe B.3.2.3.

B.3.2.6 fastDiagonalUnscaledInverse...**Aufruf**

```
T = fastDiagonalUnscaledInverseMatrixWaveletTransformSpect ( WT,  
NM, scales, wavelets, args, factors )
```

Übergebene Parameter

NM enthält die Inverse der nach Satz 30 berechneten Zulässigkeitsmatrix multipliziert mit 2, wenn die Invertierung mit einer Diagonalmatrix aus Dirac-Distributionen erfolgt.

Zur Berechnung siehe auch B.3.3.4; für die anderen Parameter siehe B.3.2.3.

Rückgabewert

Siehe B.3.2.3.

B.3.3 Funktionen zur Bestimmung der Zulässigkeitsmatrix

B.3.3.1 matrixCPsiSpect

Berechnet die in Abschnitt 6.1 definierte Zulässigkeitsmatrix vermöge Transposition.

Aufruf

```
C = matrixCPsiSpect ( wavelets, args, base_scales, factors )
```

Übergebene Parameter

wavelets enthält die Namen der zu verwendenden Waveletspektren aus Tabelle B.2 als Cell-Array von Strings.

args enthält die Argumente zu den verwendeten Wavelets als Cell-Array Skalaren und auch Vektoren in gleicher Größe wie oben.

base_scales Enthält die von `matrixWaveletTransformSpect` oder `changeableFactorsMatrixWaveletTransformSpect` zurückgegebenen Skalen, die in der Transformation enthalten sind.

factors enthält Gewichtungsfaktoren zu den verwendeten Wavelets als Matrix in gleicher Größe wie die Cell-Arrays. Einzelne Faktoren dürfen auch 0 sein.

Rückgabewert

C enthält die gewünschte Zulässigkeitsmatrix.

B.3.3.2 noTransposeMatrixCPsiSpect

Berechnet die in Definition 36 angegebene Zulässigkeitsmatrix vermöge Identität.

Aufruf

```
C = noTransposeMatrixCPsiSpect ( wavelets, args, base_scales,
factors )
```

Übergebene Parameter und Rückgabewert

Siehe B.3.3.1.

B.3.3.3 diagonalMatrixCPsiSpect

Berechnet die nach Satz 30 gegebene Zulässigkeitsmatrix vermöge Diagonalisierung.

Aufruf

```
C = diagonalMatrixCPsiSpect ( wavelets, args, base_scales,
factors )
```

Übergebene Parameter und Rückgabewert

Siehe B.3.3.1.

B.3.3.4 fastDiagonalMatrixCPsiSpect

Berechnet die nach Satz 30 gegebene Zulässigkeitsmatrix, wenn die Invertierung mit einer Diagonalmatrix aus Dirac-Distributionen erfolgt.

Aufruf

```
C=fastDiagonalMatrixCPsiSpect ( wavelets, args, base_scales,
factors )
```

Übergebene Parameter und Rückgabewert

Siehe B.3.3.1.

B.3.3.5 `lookupMatrixCPsiSpect`

Berechnet die Zulässigkeitsmatrix wie B.3.3.1, nutzt jedoch die Möglichkeit, bereits berechnete Funktionswerte wieder zu verwenden, wenn beispielsweise das Matrixwavelet an vielen oder allen Positionen identische skalare Wavelets mit identischen Parametern, aber unterschiedlichen Gewichtungsfaktoren aufweist.

Aufruf

```
C = lookupMatrixCPsiSpect ( wavelets, args, base_scales,  
factors )
```

Übergebene Parameter und Rückgabewert

Siehe B.3.3.1.

B.3.4 **Hilfstransformationen****B.3.4.1** `matrixIntegerUpsampling`

Diese Funktion führt ein FFT-basiertes Upsampling für jedes einzelne Signal eines vektorwertigen Signals um einen gegebenen Faktor, wie in 3.5, durch. Spalten- oder Zeilenvektoreigenschaft werden dabei erhalten, Reellwertigkeit wird erzwungen.

Aufruf

```
T = matrixIntegerUpsampling ( t, u )
```

Übergebene Parameter

`t` enthält das umzurechnende Signal als zweidimensionales Array der Größe $m \times n$, wie in B.3.2.1 beschrieben.

`u` enthält den ganzzahligen Upsampling-Faktor.

Rückgabewert

`T` enthält das umgerechnete Signal als Array der Größe $m \times (u \cdot n)$.

B.3.4.2 `matrixUpsRep`

Diese Funktion führt analog zu `upsRep` (B.2.2.2) für ein übergebenes vektorwertiges Signal ein Upsampling und eine Periodisierung durch, so dass die obere und untere Grenzfrequenz der Transformation dem Wavelet entsprechend angepasst werden können. Die außerdem übergebene Abtastfrequenz wird ebenfalls entsprechend umgerechnet.

Aufruf

```
[ T, new_sf ] = matrixUpsRep ( signal, sf, ups, rep )
```

Übergebene Parameter

`signal` Enthält das Signal, so wie es auch an `matrixWaveletTransformSpect` oder `changeableFactorsMatrixWaveletTransformSpect` übergeben würde, mit l Abtastpunkten.

`sf` enthält die Abtastfrequenz des Originalsignals als Skalar.

`ups` enthält den ganzzahligen Upsampling-Faktor. Ein Faktor von 1 bewirkt, dass kein Upsampling stattfindet.

`rep` enthält den ganzzahligen Periodisierungs-Faktor. Ein Faktor von 1 bewirkt, dass keine Periodisierung stattfindet.

Rückgabewerte

`T` enthält das umgerechnete Signal mit $l \cdot \text{ups} \cdot \text{rep}$ Abtastpunkten.

`new_sf` enthält die neue Abtastfrequenz.

B.3.4.3 `matrixDeRepTransform`

Die Matrixwavelet-Transformierte eines periodisierten Signals ist ebenfalls periodisch und daher reicht es, eine einzige Periode darzustellen oder für Filterzwecke zu bearbeiten. `deRepTransform` leistet genau diese Extraktion.

Aufruf

```
single_WT = matrixDeRepTransform ( WT, rep )
```


Übergebene Parameter

WT enthält die zu deperiodisierende Matrixwavelet-Transformierte als dreidimensionales Array der Größe $m \times n \times p$.

rep enthält den ganzzahligen Periodisierungsfaktor.

Rückgabewert

single_WT enthält die extrahierte Periode der Matrixwavelet-Transformierten als dreidimensionales Array der Größe $m \times (n/\text{rep}) \times p$.

B.3.4.4 matrixReRepTransform

Um Schwierigkeiten in den tiefen Frequenzen bei der Rücktransformation zu vermeiden, muss eine deperiodisierte Matrixwavelet-Transformierte wieder reperiodisiert werden.

Aufruf

```
rep_WT = matrixReRepTransform ( single_WT, rep )
```

Übergebene Parameter

single_WT enthält die zu reperiodisierende einzelne Periode der Matrixwavelet-Transformierten als dreidimensionales Array der Größe $m \times n \times p$.

rep enthält den ganzzahligen Periodisierungs-Faktor als Skalar.

Rückgabewert

rep_WT enthält die reperiodisierte Matrixwavelet-Transformierte als dreidimensionales Array der Größe $m \times (n \cdot \text{rep}) \times p$.

B.3.4.5 matrixUpsPad

Diese Funktion führt für ein übergebenes vektorwertiges Signal ein Upsampling und ein Auffüllen mit Nullen („Zero padding“) auf ein Vielfaches der Signallänge durch, so dass die obere und untere Grenzfrequenz der Transformation dem Wavelet entsprechend angepasst werden können. Die außerdem übergebene Abtastfrequenz wird ebenfalls entsprechend umgerechnet. Im Unterschied zu einer Periodisierung können so Artefakte unterdrückt werden,

die durch die implizite Annahme eines periodischen Signals durch die FFT entstehen.

Aufruf

```
[ padded_signal, new_sf ] = matrixUpsPad ( signal, sf, ups,
pad )
```

Übergebene Parameter

signal Enthält das Signal, so wie es auch an `matrixWaveletTransformSpect` oder `changeableFactorsMatrixWaveletTransformSpect` übergeben würde, mit l Abtastpunkten.

sf enthält die Abtastfrequenz des Originalsignals als Skalar.

ups enthält den ganzzahligen Upsampling-Faktor. Ein Faktor von 1 bewirkt, dass kein Upsampling stattfindet.

pad enthält den ganzzahligen Auffüll-Faktor. Ein Faktor von 1 bewirkt, dass kein Auffüllen stattfindet.

Rückgabewerte

modified_signal enthält das umgerechnete Signal mit $l \cdot \text{ups} \cdot \text{rep}$ Abtastpunkten.

new_sf enthält die neue Abtastfrequenz.

B.3.5 Interne Hilfsfunktionen

Wie schon im skalaren Fall werden diese Funktionen innerhalb der Software benutzt, um die Tabellen mit den abgetasteten Waveletspektra vorauszurechnen. Auch sie sollten nie „von Hand“ aufgerufen werden müssen.

B.3.5.1 `matrixScalesFrequenciesAndSpectra`

Aufruf

```
[ S, F, PSI ] = matrixScalesFrequenciesAndSpectra ( wavelets,
args, factors, dt, l, lock_centre_frequencies )
```

Übergebene Parameter

wavelets enthält die Namen der zu verwendenden Waveletspektren aus Tabelle B.2 als Cell-Array von Strings.

args enthält die Argumente zu den verwendeten Wavelets als Cell-Array Skalaren oder Vektoren in gleicher Größe wie oben.

factors enthält Gewichtungsfaktoren zu den verwendeten Wavelets als Matrix in gleicher Größe wie die Cell-Arrays. Einzelne Faktoren dürfen auch 0 sein.

dt enthält das Abtastintervall (üblicherweise in Sekunden) als Skalar.

l enthält die Anzahl der Abtastpunkte des Signals

lock_centre_frequencies *Dieser Parameter hat zur Zeit keine Funktion!*
In einer weiter entwickelten Version soll hier ein Wahrheitswert übergeben werden, der die Skalen der Elementfunktionen des Matrixwavelets so abgleicht, dass alle die selbe zentrale Frequenz haben.

Rückgabewerte

S enthält die zu den in PSI zurückgegebenen Waveletspektren gehörigen Skalen als Vektor von Cell-Arrays, wobei diese die selben Dimensionen wie **wavelets** haben.

F enthält die zu den in **S** zurückgegebenen Skalen gehörigen zentralen Frequenzen als Vektor von Cell-Arrays, wobei diese die selben Dimensionen wie **wavelets** haben..

PSI enthält die für die Matrixwavelet-Transformation benötigten Waveletspektren als dreidimensionales Array. Dabei gehört zu einem m -dimensionalen Signal mit n Abtastpunkten ein $m \times n \times p$ -dimensionales Array. Dabei ist p die Anzahl der Skalen und a priori nicht bekannt.

B.3.5.2 cachedFeval

Diese Funktion erlaubt es, verschiedene Waveletspektren zu verschiedenen Skalen wiederholt für eine *die selbe* Menge von Stützstellen auszuwerten, wobei die Werte nach jedem Aufruf zwischengespeichert werden und ohne erneute Berechnung abgerufen werden können. Je größer die Dimensionen des Signals sind, desto größer wird der Geschwindigkeitsgewinn. Die Funktion wird in der jetzigen Version der Software von `matrixScalesFrequenciesAndSpectra` und `unscaledInverseMatrixWaveletTransformSpect` benutzt.

Aufruf

```
Y = cachedFeval ( wavelet_spect_or_xi, scale, param )
```

Übergebene Parameter

`wavelet_spect_or_xi` hat die folgenden beiden Funktionen:

1. Wird er allein als eine Menge von Stützstellen angegeben, so werden die internen Tabellen für die Verwendung mit dieser Menge neu initialisiert. Dies dient dazu, bei einem Wechsel der Stützstellenmenge alte Berechnungen zu Entfernen, die das Nachschlagen in den Tabellen verlangsamen würden.
2. Werden alle drei Parameter angegeben, so wird das Ergebnis der Auswertung an den zuvor festgelegten Stützstellen für den im Parameter übergebenen Namen eines Waveletspektrums nach Tabelle B.2, die übergebene Skala und den übergebenen Waveletparameter zunächst in den internen Tabellen gesucht, und bei Erfolg zurückgegeben, sowie bei Misserfolg berechnet, gespeichert und zurückgegeben. Die Genauigkeit des Vergleichs auf identische Skalen und Parameter erfolgt dabei auf 7 Stellen.

Wenn nicht `wavelet_spect_or_xi` als einziger Parameter angegeben wird, so müssen noch zwei weitere Parameter übergeben werden:

`scale` enthält die Skala, für die das Waveletspektrum ausgewertet werden soll.

`param` enthält enthält den Parameter für das Wavelet.

Rückgabewert

`Y` enthält die Auswertung des Waveletspektrums an den vorher übergebenen Stützstellen.

B.3.5.3 cachedCentreFrequencySpect

Dient zur wiederholten Berechnung zentraler Frequenzen von Wavelets für den Fall, dass diese zu identischen Wavelets und Parametern berechnet werden müssen. Da die Berechnung recht langwierig ist, führt auch hier ein Zwischenspeichern bereits berechneter Werte zu einer erheblichen Zeitersparnis. Die Funktion wird in der jetzigen Version der Software von `matrixScalesFrequenciesAndSpectra` und `unscaledInverseMatrixWaveletTransformSpect` benutzt.

Aufruf

```
cachedCentreFrequencySpect ()  
oder  
eta = cachedCentreFrequencySpect ( wavelet_spect, params,  
scale )
```

Übergebene Parameter

Wird kein Parameter übergeben, so werden die internen Tabellen neu initialisiert. Ansonsten müssen folgende Parameter übergeben werden:

`wavelet_spect` enthält wie üblich den Namen eines Waveletspektrums nach Tabelle B.2 als String.

`params` enthält den oder die gewünschten Waveletparameter.

`scale` enthält die gewünschte Skala, zu der die zentrale Frequenz berechnet werden soll.

Rückgabewert

`eta` enthält die gewünschte zentrale Frequenz.

Anhang C

Begriffe, Symbole und Rechenregeln

C.1 Glossar medizinischer Fachbegriffe

10-20-System Ein international verbreitetes System zur Positionierung der EEG-Elektroden auf der Kopfoberfläche. Für Details siehe [tag58].

anterior Vorn.

Atrien Die Vorhöfe der Herzkammern.

EEG (Elektroenzephalogramm) Die Aufzeichnung der elektrischen Hirnaktivität.

EKG (Elektrokardiogramm) Die Aufzeichnung der elektrischen Herzaktivität.

Epilepsie Anfallsleiden des zentralen Nervensystems, bei dem es durch synchrone Aktivität großer Nervenzellverbände zu einer Vielzahl von Symptomen wie zum Beispiel Krämpfen, Bewusstseinsstörungen oder visuellen und anderen Halluzinationen kommt.

fokal Auf eine bestimmte Gehirnregion beschränkt.

iktal Während des Anfalls.

intrakranielles EEG Im Innern des Schädels gemessenes EEG. Dazu wird entweder auf das freigelegte Gehirn eines Patienten eine Folie mit Elektroden gelegt oder es werden sehr feine Elektroden direkt in das Gehirn implantiert, was es ermöglicht, auch tiefer gelegene Hirnstrukturen zu

überwachen. Dieses Vorgehen ermöglicht es, die Zentren, von denen epileptische Anfälle ausgehen, mit hoher Genauigkeit zu bestimmen,

lateral Zur Seite hin.

posterior Hinten.

Ventrikel Die Herzkammern.

α -Band EEG-Frequenzband im Bereich von 8–12 Hertz

β -Band EEG-Frequenzband im Bereich 12–30 Hertz

γ -Band EEG-Frequenzband im Bereich > 30 Hertz

δ -Band EEG-Frequenzband im Bereich 0.5–4 Hertz

θ -Band EEG-Frequenzband im Bereich 4–8 Hertz

C.2 Im Text verwendete Symbole

Symbol	Bedeutung
\mathbb{I}_n	n -dimensionale Einheitsmatrix
\mathbb{Z}_n	$\mathbb{Z} \bmod n$
\mathcal{L}_p	Der Raum der Funktionen mit $\sqrt[p]{\int_{\mathbb{R}} f(t) ^p dt} < \infty$
ℓ_p	Der Raum der Folgen mit $\sqrt[p]{\sum_{z \in \mathbb{Z}} f(z) ^p} < \infty$
$\ \cdot\ _p$	p -Norm einer Funktion oder Folge
$\ \cdot\ _F$	Frobeniusnorm einer Matrix
\cdot^T	Transposition
\cdot^H	hermitesche Transposition
\hat{f}, f^\wedge	Fouriertransformation von f
\tilde{F}, F^\vee	Inverse Fouriertransformation von F
$f \star g$	Faltung von f mit g
$f * g$	Korrelation von f mit g
$f \bar{*} g$	$\bar{*}$ -Operator aus Gleichung 2.2
$M \odot N$	Hadamard-Produkt der Matrizen M und N
$\overline{\Psi(\cdot)}, \overline{\Psi(\cdot)}$	Konjugation

C.3 Rechenregeln für die Fouriertransformation

Zeitbereich	Frequenzbereich
$f(t - u)$	$e^{-i\omega u} \hat{f}(\omega)$
$f \star g$	$\hat{f} \cdot \hat{g}$
$f * g$	$\hat{f} \cdot \overline{\hat{g}}$
$f \overline{*} g$	$\overline{\hat{f}} \cdot \hat{g}$
$e^{i\xi t} f(t)$	$\hat{f}(\omega - \xi)$
$(-it)^p f(t)$	$\hat{f}^{(p)}(\omega)$
$f \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$	$\hat{f}(\omega) = \overline{\hat{f}(-\omega)}$

Literaturverzeichnis

- [AK09] ALEXANDER KLEIN, TOMAS SAUER, WOLFGANG SKRANDIES: *Simultane Waveletanalyse von mehreren EEG-Kanälen*. Oktober 2009. Vortrag auf dem Deutschen EEG/EP Mapping Meeting, Rauischholzhausen, Abstract in Englisch online: <http://geb.uni-giessen.de/geb/volltexte/2010/7618/> am 18. Januar 2011 16:00 Uhr.
- [APK⁺98] ALLEN, PHILIP J., GIOVANNI POLIZZI, KARSTEN KRAKOW, DAVID R. FISH und LOUIS LEMIEUX: *Identification of EEG Events in the MR Scanner: The Problem of Pulse Artifact and a Method for Its Subtraction*. NeuroImage, 8(3):229 – 239, 1998.
- [Bax91] BAXTER, B. J. C.: *Conditionally positive functions and p-norm distance matrices*. Constructive Approximation, 7:427–440, 1991.
- [BGB⁺06] BRISELLI, ENNIO, GIROLAMO GARREFFA, LUIGI BIANCHI, MARTA BIANCIARDI, EMILIANO MACALUSO, MANUEL ABBAFATI, MARIA GRAZIA MARCIANI und BRUNO MARAVIGLIA: *An independent component analysis-based approach on ballistocardiogram artifact removing*. Magnetic Resonance Imaging, 24(4):393 – 400, 2006.
- [Bha94] BHATIA, RAJENDRA: *Matrix factorizations and their perturbations*. Linear Algebra and its Applications, 197-198:245 – 276, 1994.
- [Bla98] BLATTER, CHRISTIAN: *Wavelets – Eine Einführung*. Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig, Wiesbaden, 1998.
- [BM02] BUCHER, RALPH und D. MISRA: *A Synthesizable VHDL Model of the Exact Solution for Three-dimensional Hyperbolic Positioning System*. VLSI Design, 15(2):507–520, 2002.

- [BPJ⁺02] BONMASSAR, GIORGIO, PATRICK L. PURDON, IIRO P. JÄÄSKELÄINEN, KEITH CHIAPPA, VICTOR SOLO, EMERY N. BROWN und JOHN W. BELLIVEAU: *Motion and Ballistocardiogram Artifact Removal for Interleaved Recording of EEG and EPs during MRI*. NeuroImage, 16(4):1127 – 1141, 2002.
- [Chu92] CHUI, CHARLES K. (Herausgeber): *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*. Academic Press, San Diego, California, 1992.
- [Dau92] DAUBECHIES, INGRID: *Ten lectures on wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 1992.
- [DE99] DIECI, LUCA und TIMO EIROLA: *On Smooth Decompositions of Matrices*. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 20(3):800–819, 1999.
- [Del04] DELLA RICCIA, G.: *Inversions relating Stirling, tanh, Lah numbers and an application to Mathematical Statistics*. ArXiv Mathematics e-prints, Mai 2004.
<http://arxiv.org/abs/math/0405594> am 31.1.2007, 12:55 Uhr.
- [Dim02] DIMITROMANOLAKIS, APOSTOLOS: *Analysis Of The Golomb Ruler And The Sidon Set Problems And Determination Of Large Near-Optimal Golomb Rulers*. 2002. Diploma Thesis, Technical University of Crete.
- [DR67] DAVIS, PHILIP J. und PHILIP RABINOWITZ: *Numerical Integration*. Blaisdell Publishing Company, Waltham–Massachusetts, Toronto, London, 1967.
- [DWCZ05] DENG, Y., C. WANG, L. CHAI und Z. ZHANG: *Determination of Gabor wavelet shaping factor for accurate phase retrieval with wavelet-transform*. Applied Physics B, 81:1107–1111, 2005.
- [ELS⁺04] ELLINGSON, M. L., E. LIEBENTHAL, M. V. SPANAKI, T. E. PRIETO, J. R. BINDER und K. M. ROPELLA: *Ballistocardiogram artifact reduction in the simultaneous acquisition of auditory ERPS and fMRI*. NeuroImage, 22(4):1534 – 1542, 2004.
- [Far92] FARGE, M.: *Wavelet transforms and their applications to turbulence*. Annual Review of Fluid Mechanics, 24:395–457, 1992.

- [FJ05] FRIGO, MATTEO und STEVEN G. JOHNSON: *The Design and Implementation of FFTW3*. Proceedings of the IEEE, 93(2):216–231, 2005. special issue on Program Generation, Optimization, and Platform Adaptation".
- [Gau78] GAUTSCHI, WALTER: *On inverses of Vandermonde and confluent Vandermonde matrices III*. Numerische Mathematik, 29:445–450, 1978.
- [Geb10] GEBHARDT, HELGE. Persönliche Kommunikation, März 2010.
- [GG] GUSTAFSSON, FREDRIK und FREDRIK GUNNARSSON: *Positioning Using Time-Difference Of Arrival Measurements*. <http://citeseer.ist.psu.edu/548251.html> am 12.3.2007, 15:30 Uhr.
- [GSEC00] GOLDMAN, ROBIN I., JOHN M. STERN, JEROME ENGEL und MARK S. COHEN: *Acquiring simultaneous EEG and functional MRI*. Clinical Neurophysiology, 111(11):1974 – 1980, 2000.
- [GvL96] GOLUB, GENE H. und CHARLES F. VAN LOAN: *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 3. Auflage, 1996.
- [HJ85] HORN, ROGER A. und CHARLES R. JOHNSON: *Matrix analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, 1985. (19th printing 2005).
- [HJ91] HORN, ROGER A. und CHARLES R. JOHNSON: *Topics in matrix analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, 1991. (7th printing 2006).
- [Hol98] HOLSCHNEIDER, M.: *Wavelets: An Analysis Tool*. Oxford University Press, New York, Reprint Auflage, 1998.
- [KAP⁺97] KRAKOW, K., P. ALLEN, G. POLIZZI, L. LEMIEUX und D. FISH: *The amplitude and distribution of EEG pulse artifact in the MR scanner: its effect on the detection of EEG events*. In: *ISMRM 6-th scientific meeting*, Seite 1494, 1997.
- [Kle03] KLEIN, ALEXANDER: *Mathematische Analyse assoziativer Lernvorgänge anhand von Phasenkohärenz im EEG*. 2003. Diplomarbeit, Justus-Liebig-Universität Gießen.

- [KSSJ06] KLEIN, ALEXANDER, TOMAS SAUER, WOLFGANG SKRANDIES und ANDREAS JEDYNIAK: *Conventional and wavelet coherence applied to sensory-evoked electrical brain activity*. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 53(2):266 – 272, 2006.
- [KYP04] KIM, KYUNG HWAN, HYU WOON YOON und HYUN WOOK PARK: *Improved ballistocardiac artifact removal from the electroencephalogram recorded in fMRI*. Journal of Neuroscience Methods, 135(1-2):193 – 203, 2004.
- [LS80] LEHMANN, D. und W. SKRANDIES: *Reference-free identification of components of checkerboard-evoked multichannel potential fields*. Electroencephalography and Clinical Neurophysiology, 48(6):609 – 621, 1980.
- [Mal99] MALLAT, STÉPHANE: *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, San Diego, California, 2. Auflage, 1999.
- [Mic86] MICCHELLI, CHARLES A.: *Interpolation of scattered data: Distance matrices and conditionally positive definite functions*. Constructive Approximation, 2:11–22, 1986. 10.1007/BF01893414.
- [MKH07] MARAUN, D., J. KURTHS und M. HOLSCHNEIDER: *Nonstationary Gaussian processes in wavelet domain: Synthesis, estimation, and significance testing*. Physical Review E, 75(1), 2007.
- [MM92] MARCUS, MARVIN und HENRYK MINC: *A survey of matrix theory and matrix inequalities*. Dover Publications, Mineola, NY, USA, 1992.
- [MP99] MITRA, P. P. und B. PESARAN: *Analysis of Dynamic Brain Imaging Data*. Biophysical Journal, 76:691–708, 1999.
- [NBI⁺05] NIAZY, R.K., C.F. BECKMANN, G.D. IANNETTI, J.M. BRADY und S.M. SMITH: *Removal of fMRI environment artifacts from EEG data using optimal basis sets*. NeuroImage, 28(3):720 – 737, 2005.
- [Oja00] OJA, E.: *Independent component analysis: algorithms and applications*. Neural Networks, 13:411–430, 2000.
- [SC03] SKRANDIES, W. und M. J. CHIU: *Dimensions of affective semantic meaning – behavioral and evoked potential correlates in Chinese subjects*. Neuroscience Letters, 341(1):45 – 48, 2003.

- [SCHL⁺05] SRIVASTAVA, G., S. CROTTAZ-HERBETTE, K.M. LAU, G.H. GLOVER und V. MENON: *ICA-based procedures for removing ballistocardiogram artifacts from EEG data acquired in the MRI scanner*. NeuroImage, 24(1):50 – 60, 2005.
- [Skr89] SKRANDIES, WOLFGANG: *Data reduction of multichannel fields: Global field power and Principal Component Analysis*. Brain Topography, 2:73–80, 1989. 10.1007/BF01128845.
- [Skr98] SKRANDIES, WOLFGANG: *Evoked potential correlates of semantic meaning—A brain mapping study*. Cognitive Brain Research, 6(3):173 – 183, 1998.
- [Ste01] STEWART, G. W.: *Matrix algorithms*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2001.
- [tag58] *Report of the committee on methods of clinical examination in electroencephalography: 1957*. Electroencephalography and Clinical Neurophysiology, 10(2):370 – 375, 1958.
- [TC98] TORRENCE, CHRISTOPHER und GILBERT P. COMPO: *A Practical Guide to Wavelet Analysis*. Bulletin of the American Meteorological Society, 79(1):61–78, 1998.

Index

A

Abtastintervall, 39
analytisch, 18
Artefakt
 cardioballistisches, 61
Atrien, 62

B

Bandbreite, 22

C

Covarianzmatrix
 empirische, 114

D

diagonaldominant, 76
Distanzmatrix, 97
Doppelfakultät, 50

E

Elektroenzephalogramm, 61
Elektrokardiogramm, 62

F

Faltung, 14
Fensterfunktion, 21
Fouriertransformation, 13
 diskrete, 40
Frequenz
 zentrale, 19
 zentrale, bei Matrixwavelets, 81
Frequenzbänder
 EEG, 196

G

Golomb-Lineal, 94

H

Hadamard-Produkt, 80
Hauptkomponentenanalyse, 113
Heisenberg-Box, 21

I

ICA, 119

K

Korrelation, 14

L

Lah-Zahlen, 49
lipschitzstetig, 26

M

Magnetresonanztomogramm, 61
Matrix
 zirkuläre, 86
Matrixscalogramm, 81
 normalisiertes, 81
Matrixwavelet
 analytisches, 80
Matrixwavelet vermöge
 Diagonalisierung, 87
 Identität, 85
 Transposition, 75
Matrixwavelet-Transformation, 73
Momentanfrequenz, 22
Momente
 verschwindende, 25

O

$\bar{*}$ -Operator, 14

P

Periodisierung, 43

Plancherel, 40

R

RC-Glied, 30

S

Scalogramm, 23

normalisiertes, 23

schnell fallend, 25

Signal

endliches, zeitdiskretes, 40

Skalierungsparameter, 73

Spektrum

endliches, zeitdiskretes, 40

strikt positiv definite Funktion, 97

T

Träger, 79

Translationsparameter, 73

U

Unabhängigkeitsanalyse, 119

Upsampling, 44

V

Ventrikel, 62

W

Wavelet, 17

Daubechies–Grossman–Meyer-, 167

Gabor-, 164

Haar-, 163

Mexican-Hat-, 164

Morlet-, 164

Paul-, 167

Z

Zacken

R-, 62

Zulässigkeit

(primäre), 74

Zulässigkeitskonstante, 17

Zulässigkeitsmatrix vermöge

Diagonalisierung, 87

Identität, 85

Transposition, 75

Die Quelltexte der im Rahmen dieser Arbeit entstandenen Software können aus lizenzrechtlichen Gründen an dieser Stelle nicht veröffentlicht werden. Falls Sie Interesse am Einsatz der Software haben, so wenden Sie sich bitte an Prof. Dr. Sauer vom Lehrstuhl für Numerische Mathematik an der Justus-Liebig-Universität in Gießen.